Contrôle de mathématiques

Lundi 13 février 2023

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des cinq questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

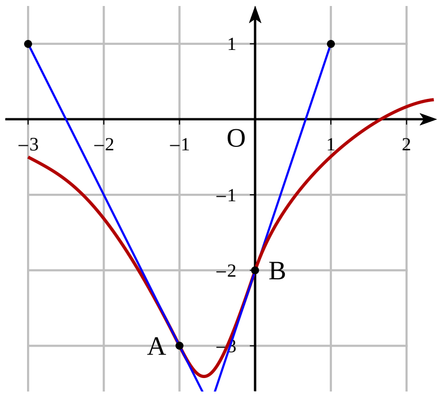
1) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{5-x}$ est :

a) $\mathbb{R} - \{0\,;\,5\}$ b) $[5\,;+\infty[$ c) $]-\infty\,;\,5]$ d) $]-\infty\,;\,5[$

2) La fonction f définie par $f(x) = 2 - \dfrac{3}{x-4}$:

a) est croissante sur $]-\infty\,;\,4[$
c) admet 2 comme maximum
b) est décroissante sur $]4\,;+\infty[$
d) admet un maximum en 4

Pour les questions 3) et 4), on donne la représentation graphique de la fonction f suivante :



3) D'après la représentation graphique de f, on peut affirmer que :

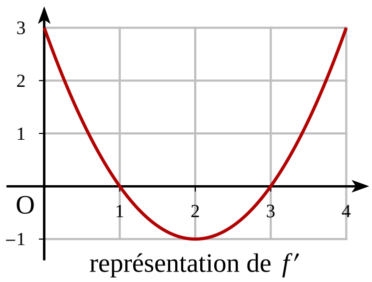
a) $f'(-1) = -3$ b) $f'(-1) = -\dfrac{1}{2}$ c) $f'(0) = 1$ d) $f'(0) = 3$

4) D'après la représentation graphique de f, l'équation de la tangente en A est :

a) $y = -3x - 3$ b) $y = -2x - 5$ c) $y = 2x - 1$ d) $y = 3x$

5) On a représenté ci-contre la **fonction dérivée** d'une fonction f. On peut affirmer que la fonction f admet

a) un minimum en 1
c) un minimum en 3
b) un minimum en 2
d) pas de minimum



représentation de f'

EXERCICE 2

Fonctions dérivées **(6 points)**

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes en précisant les valeurs pour lesquelles le calcul est valable.

1) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 6$
2) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$
3) $f(x) = 2x\sqrt{x+3}$
4) $f(x) = \dfrac{7x-4}{2-x}$
5) $f(x) = 2x + 1 - \dfrac{3}{2x+5}$
6) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

EXERCICE 3

Coût moyen **(4 points)**

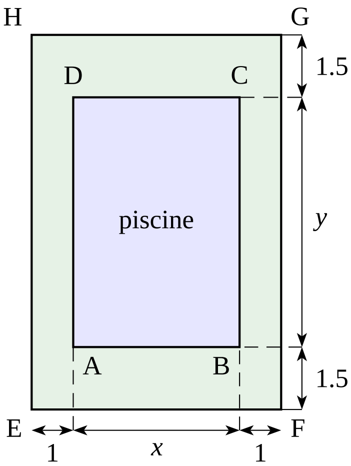
Une entreprise produit entre 1 millier et 5 milliers de pièces par jour. Le coût moyen de production d'une pièce, en milliers d'euros, pour x milliers de pièces produites, est donné par la fonction f définie pour tout réel $x \in [1\,;\,5]$ par :

$$f(x) = \frac{0,5x^3 - 3x^2 + x + 16}{x}$$

1) Calculer le coût moyen de production d'une pièce lorsque l'entreprise produit 2 milliers de pièces.
2) On admet que de f est dérivable sur $[1\,;\,5]$. Montrer que pour tout réel $x \in [1\,;\,5]$
$$f'(x) = \frac{(x-4)(x^2+x+4)}{x^2}$$
3) Résoudre $f'(x) = 0$, puis dresser le tableau de variation de f sur $[1\,;\,5]$.
4) Déterminer le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de production d'une pièce soit minimal, ainsi que la valeur de ce coût minimal.

EXERCICE 4

Piscine **(5 points)**



On souhaite construire une piscine rectangulaire ABCD entourée d'une clôture rectangulaire EFGH.
La surface totale du terrain EFGH est égale à 54 m^2.
On appelle x la largeur et y la longueur en mètre de la piscine.
On admet que $x \in [0\,;\,5]$

1) Montrer que $y = \dfrac{48-3x}{x+2}$
2) Quelle est la surface de la piscine pour $x = 3$?
3) On appelle $f(x)$ la surface de la piscine.

   Montrer que pour $x \in [0\,;\,5]$, $f(x) = \dfrac{48x - 3x^2}{x+2}$
4) Démontrer que $x \in [0\,;\,5]$, $f'(x) = \dfrac{-3x^2 - 12x + 96}{(x+2)^2}$
5) Quelle est la valeur de x pour laquelle la surface de la piscine est maximale ? Quelles sont alors les dimensions de la piscine ?