# Contrôle de mathématiques

## Lundi 20 mars 2023

## Exercice 1

**QCM** **(5 points)**

*Pour chacune des cinq questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

1) La quantité $\dfrac{(e^{2x})^2}{e^{3x+1}e^{-x-1}}$ peut se simplifier en :

a) $e^{2x}$ b) $e^{4x+2}$ c) 1 d) 0

2) On peut écrire $2 + \dfrac{3e^{-x} - 5}{e^{-x} + 1}$ par :

a) $\dfrac{5 - 3e^x}{1 - e^x}$ b) $\dfrac{5 + 3e^x}{1 - e^x}$ c) $\dfrac{5 + 3e^x}{1 + e^x}$ d) $\dfrac{5 - 3e^x}{1 + e^x}$

3) On peut écrire $(3x - 1)e^x < 0 \Leftrightarrow 3x - 1 < 0$ car :

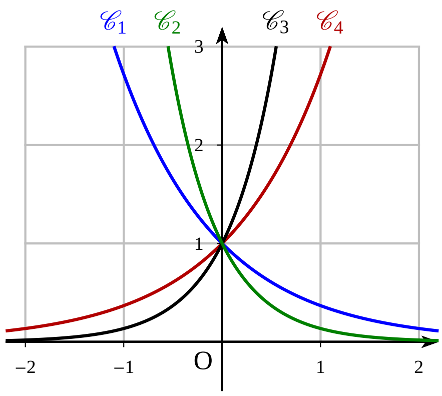
a) la fonction exp est monotone
c) la fonction exp est positive sur $\mathbb{R}$.
b) la fonction exp est croissante
d) la fonction exp est non nulle sur $\mathbb{R}$

4) On a représenté quatre fonctions $f$, $g$, $h$ et $k$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x \ , \ g(x) = e^{-x} \ , \ h(x) = e^{2x} \ , \ k(x) = e^{-2x}$$

Laquelle de ces courbes représente la fonction $k$ ?

a) $\mathscr{C}_1$ b) $\mathscr{C}_2$ c) $\mathscr{C}_3$ d) $\mathscr{C}_4$




5) Soit la fonction $f$, de courbe $\mathscr{C}_f$, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\,e^x$.
La tangente à $\mathscr{C}_f$ en $x = 1$ a pour équation :

a) $y = ex + e$ b) $y = 2ex - e$ c) $y = 2ex + e$ d) $y = ex$

## Exercice 2

**Équations et inéquations** **(4 points)**

1) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ en se justifiant rigoureusement :

a) $e^{5-x^2} = e$ b) $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ (poser $X = e^x$)

2) Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ en se justifiant rigoureusement

a) $e^{2x} - 1 < 0$ b) $e^{2x} - e^{x+1} \geqslant 0$

## EXERCICE 3

**Fonction** **(5 points)**

1) Soit la fonction $f$ définie sur $[-2\,;1]$ par : $f(x) = (1-2x)\,e^x$.
   a) Déterminer et factoriser $f'(x)$ où $f'$ est la fonction dérivée de $f$.
   b) Résoudre $f'(x) = 0$ puis dresser le tableau de variations de $f$ sur $[-2\,;\,1]$.
   Préciser les valeurs exactes des bornes et des extremums éventuels.
   c) L'équation $f(x) = 2$ admet-elle des solutions ? Justifier.
2) Soit la fonction $g$ définie sur $[-2\,;\,4]$ par : $g(x) = x^2e^{-x}$
   a) Déterminer et factoriser $g'(x)$ où $g'$ est la fonction dérivée de $g$.
   b) Résoudre $g'(x) = 0$ puis dresser le tableau de variations de $g$ sur $[-2\,;\,4]$.

## EXERCICE 4

**Injection d'un produit chez un sportif** **(6 points)**

On procède, chez un sportif, à l'injection intramusculaire d'un produit. Celui-ci se diffuse progressivement dans le sang. On admet que la concentration de ce produit dans le sang (exprimée en mg/L) peut être modélisée par la fonction $f$, définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par : $f(t) = \dfrac{6t}{e^t}$ où $t$ est le temps exprimé en heure.

1) Montrer que pour tout $t \in [0\,;\,10]$, la fonction dérivée $f'$ a pour expression :
$$f'(t) = \frac{6-6t}{e^t}$$
2) Résoudre $f'(t) = 0$ puis dresser le tableau de variations de $f$ sur $[0\,;\,10]$.
3) Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ? (on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à $10^{-1}$ près). Au bout de combien de temps est-elle atteinte ?
4) Ce produit fait l'objet d'une réglementation par la fédération sportive : un sportif est en infraction si, au moment du contrôle, la concentration dans son sang du produit est supérieure à 2 mg/L.
   Le sportif peut-il être contrôlé à tout moment après son injection ? Expliquer votre raisonnement en vous basant sur l'étude de la fonction $f$.
5) Le produit est indétectable si sa concentration est inférieure à 0,01. Le programme suivant permet de déterminer le temps, à $10^{-1}$ heure près, à partir duquel le produit est indétectable.
   Compléter cet algorithme puis donner la valeur que ce programme affiche.

```python
from math import*
def f(t):
    return 6*t/exp(t)
t=1
while ......:
    t=t+0.1
print(t)
```