Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 20 mars 2023

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse a :** $\dfrac{(e^{2x})^2}{e^{3x+1}e^{-x-1}} = \dfrac{e^{4x}}{e^{3x+1-x-1}} = \dfrac{e^{4x}}{e^{2x}} = e^{2x}$.

2) **Réponse d :** $2 + \dfrac{3e^{-x}-5}{e^{-x}+1} = \dfrac{5e^{-x}-3}{e^{-x}+1} \overset{\times e^x}{=} \dfrac{5-3e^x}{1+e^x}$

3) **Réponse c :** On passe de l'expression de gauche à celle de droite en divisant par e^x qui doit donc être positif.

4) **Réponse b :** $k'(x) = -2e^{-2x} < 0$ et $g'(x) = -e^{-x} < 0$, les fonctions k et g sont décroissantes, elles correspondent aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. De plus $k'(x) < g'(x)$ donc la fonction k décroit plus vite que g et donc la courbe représentant k est la courbe $\mathscr{C}_2$.

5) **Réponse b :** $f'(x) = 1e^x + xe^x = (1+x)e^x \Rightarrow f'(1) = 2e$ et $f(1) = e$.
L'équation de la tangente en 1 est :
$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = 2e(x-1) + e \Leftrightarrow y = 2ex - e$$

EXERCICE 2

Équations et inéquations **(4 points)**

1) a) $e^{5-x^2} = e \overset{\text{exp monotone}}{\Leftrightarrow} 5 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2 \Leftrightarrow S = \{-2\,;\,2\}$

b) On pose $X = e^x$ avec $X > 0$, l'équation devient : $X^2 + 2X - 3 = 0$.
$X_1 = 1$ racine évidente, $P = -3$ $X_2 = -3 < 0$ (non retenu).
On revient à x : $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, d'où $S = \{0\}$.

2) a) $e^{2x} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{2x} < e^0 \overset{\exp\nearrow}{\Leftrightarrow} 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow S =]-\infty\,;\,0[$.

b) $e^{2x} - e^{x+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geqslant e^{x+1} \overset{\exp\nearrow}{\Leftrightarrow} 2x \geqslant x+1 \Leftrightarrow x \geqslant 1 \Leftrightarrow S = [1\,;+\infty[$.

EXERCICE 3

Fonction **(5 points)**

1) a) $f'(x) = -2e^x + (1-2x)e^x = e^x(-2+1-2x) = (-2x-1)e^x$.

b) $f'(x) = 0 \overset{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} -2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ et signe $f'(x) \overset{\exp\nearrow}{=}$ signe $(-2x-1)$.

x	-2		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$5e^{-2}$	$\nearrow$	$2e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	$-e$

c) On a $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2e^{-\frac{1}{2}} \approx 1,21$.

D'après le tableau de variation, $\forall x \in [-2\,;\,1]$, $f(x) < 0$, donc l'équation $f(x) = 2$ n'admet pas de solution.

2) a) $g'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-1)e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = x(2-x)e^{-x}$.

b) $g'(x) = 0 \overset{e^{-x}\neq 0}{\Leftrightarrow} x = 0$ ou $x = 2$ et signe $g'(x) \overset{\exp\nearrow}{=}$ signe $x(2-x)$.

x	-2		0		2		4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$4e^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	$16e^{-4}$

Exercice 4

Injection d'un produit chez un sportif **(6 points)**

1) $f'(t) = \dfrac{6e^t - 6te^t}{(e^t)^2} = \dfrac{e^t(6 + -6t)}{(e^t)^2} \overset{\div e^t}{=} \dfrac{6-6t}{e^t}$.

2) $f'(t) = 0 \overset{e^t\neq 0}{\Leftrightarrow} 6 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 1$ et signe $f'(t) \overset{\exp\nearrow}{=}$ signe $6 - 6t$.

t	0		1		10
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$6e^{-1}$	$\searrow$	$60e^{-10}$

3) La concentration maximale est donnée par : $f(1) = 6e^{-1} \approx 2,2$ mg/L à 10^{-1} près.
Cette valeur est atteinte au bout d'une heure.

4) Le sportif ne peut pas être contrôlé à tout moment après son injection car le maximum de la concentration est de 2,2 mg/L. À l'aide d'un tableau de valeur, avec un balayage de 0,01, on trouve pour $t \in [0,62\,;\,1,51]$ une concentration supérieure à 2 mg/L.

5) On a le programme suivant :

```
from math import*
def f(t):
    return 6*t/exp(t)
t=1
while f(t)>=0,01:
    t=t+0.1
print(t)
```

On trouve alors $t = 8,6$, c'est à dire qu'après 8,6 h le produit est indétectable.