Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 13 avril 2023

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse c** : $\cos 20^\circ = \dfrac{AB}{BC} \Leftrightarrow BC = \dfrac{AB}{\cos 20^\circ} = \dfrac{5}{\cos 20^\circ}$

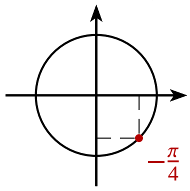
2) **Réponse d** : $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$. les autres propositions sont fausses :

$$\sin\frac{5\pi}{6} = +\frac{1}{2},\quad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\frac{7\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

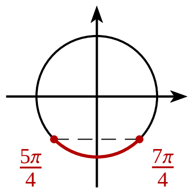
3) **Réponse a** : $\cos\dfrac{11\pi}{6} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Les autres propositions sont fausses :

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = +\frac{1}{2},\quad \text{et} \quad \cos\frac{54\pi}{6} = \cos 9\pi = \cos\pi = -1$$

4) **Réponse c** : $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$



5) **Réponse c** : $\sin x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{5\pi}{4}\,;\,\dfrac{7\pi}{4}\right]$



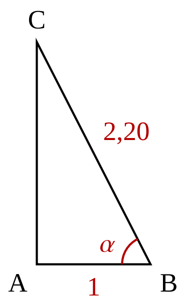
EXERCICE 2

Réparation d'un toit **(2 points)**

$\cos\alpha = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2,2}$

Donc $\alpha = \arccos\left(\dfrac{1}{2,2}\right) \approx 63^\circ < 65^\circ$.

L'échelle d'Esteban n'est pas suffisamment stable.



EXERCICE 3

Simplifications et intervalles **(4 points)**

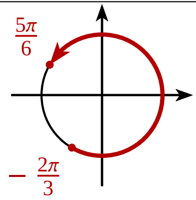
1) a) $A = \sin x + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi - x) - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin x - \sin x + \sin x - \sin x = 0$

b) $B = \cos\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right) - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \sin(7\pi + x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) - 2\sin x + \sin(\pi + x)$

$= -\sin x - 2\sin - \sin x = -4\sin x$

2) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{25} = \dfrac{24}{25} \overset{\sin x<0}{\Longrightarrow} \sin x = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

3) On obtient l'arc $\left[-\dfrac{2\pi}{3}\,;\,\dfrac{5\pi}{6}\right]$:



Exercice 4

Équation trigonométrique **(4 points)**

1) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

2) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ ou $x = -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

3) $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $2x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi] \Leftrightarrow$
$2x = \dfrac{7\pi}{12}\ [2\pi]$ ou $2x = \dfrac{11\pi}{12}\ [2\pi] \Leftrightarrow x = \dfrac{7\pi}{24}\ [\pi]$ ou $x = \dfrac{11\pi}{24}\ [\pi]$.

4) $2\cos^2 x + 9\cos x + 4 = 0$, on pose $X = \cos x$
l'équation devient $X^2 + 9X + 4 = 0 \overset{\Delta=49}{\Leftrightarrow} X_1 = \dfrac{-9+7}{4} = -\dfrac{1}{2}$ ou $X_2 = \dfrac{-9-7}{4} = -4$
$X_2 \notin [-1\,;\,1]$. On revient à x : $\cos x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $x = -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Exercice 5

Étude d'une fonction trigonométrique **(5 points)**

1) $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(-x) = \cos^2(-x) + \cos(-x) + 1 = \cos^2 x + \cos x + 1 = f(x)$.
$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x+2\pi) = \cos^2(x+2\pi) + \cos(x+2\pi) + 1 = \cos^2 x + \cos x + 1 = f(x)$.
La fonction f est paire et 2π-périodique donc on peut étudier f sur $[0\,;\,\pi]$.

2) $f'(x) = -2\sin x\cos x - \sin x = \sin x(-2\cos x - 1)$.

3) $-2\cos x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos x \leqslant -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{2\pi}{3}\,;\,\pi\right]$
$\sin x \geqslant 0$ dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ donc signe de $f'(x)$ = signe de $(-2\cos x - 1)$

4) On obtient le tableau de variation de f sur $[-\pi\,;\,\pi]$ par symétrie par rapport à $(0y)$.

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1

5) On obtient la courbe suivante :