Correction devoir de mathématiques

Du lundi 6 novembre 2023

EXERCICE 1

Forme canonique et variation **(3 points)**

$f(x) = 2x^2 + 12x + 53.$

1) $f(x) = 2\left(x^2 + 6x + \dfrac{53}{2}\right) = 2\left[(x+3)^2 - 9 + \dfrac{53}{2}\right] = 2\left[(x+3)^2 + \dfrac{35}{2}\right] = 2(x+3)^2 + 35$

2) On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	35	↗ $+\infty$

3) D'après le tableau de variation, le minimum de la fonction est 35, donc la fonction f ne peut s'annuler et donc la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

EXERCICE 2

Équations **(5 points)**

1) $2x^2 - 3x - 2 = 0$, on a $\Delta = 9 + 16 = 25 = 5^2 > 0$ deux solutions

$$x_1 = \frac{3+5}{4} = 2 \text{ ou } x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$$

2) $x^2 + 6x - 7 = 0$, on a $x_1 = 1$ solution évidente, $P = -7$ donc $x_2 = -7$.

3) $27x^2 - 36x + 12 = 0 \overset{\div 3}{\Leftrightarrow} 9x^2 - 12x + 4 = 0 \Leftrightarrow (3x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ (sol. double).

4) $x^2 - 13x + 270 = 20x \Leftrightarrow x^2 - 33x + 270 = 0$, on a $\Delta = 33^2 + 4 \times 270 = 9 = 3^2 > 0$

$$x_1 = \frac{33+3}{2} = 18 \text{ ou } x_2 = \frac{33-3}{2} = 15$$

5) $x^4 - 11x^2 = 80$, on pose $X = x^2$ avec $X \geqslant 0$, l'équation devient :

$X^2 - 11X - 80 = 0$, on a $\Delta = 121 + 320 = 441 = 21^2 > 0$ deux solutions

$$X_1 = \frac{11+21}{2} = 16 \text{ ou } X_2 = \frac{11-21}{2} = -5 < 0 \text{ (non retenu)}$$

On revient à x, on a : $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -4$

EXERCICE 3

Inéquation **(4 points)**

1) $x^2 + 3x - 4 \leqslant 0$, on a $x_1 = 1$ racine évidente, $P = -4$ donc $x_2 = -4$:

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = [-4\,;\,1]$

2) $7x-3 \leqslant 2x^2 \Leftrightarrow -2x^2+7x-3 \leqslant 0$, on a $\Delta = 49-24 = 25 = 5^2$

$$x_1 = \frac{-7+5}{-4} = \frac{1}{2} \text{ ou } x_2 = \frac{-7-5}{-4} = 3$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$-2x^2+7x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right] \cup [3\,;\,+\infty[$$

3) $\dfrac{5x^2-3x}{x^2+4x+3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(5x-3)}{x^2+4x+3} \geqslant 0$, nul pour $x = 0$ ou $x = \dfrac{3}{5}$

$x^2+4x+3 = 0$, $x_1 = -1$ sol. évidente, $P = 3$ donc $x_2 = -3$ donc $D_f = \mathbb{R} - \{-3\,;\,-1\}$

x	$-\infty$		-3		-1		0		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$x(5x-3)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{x(5x-3)}{x^2+4x+3}$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S =]-\infty\,;-3[\,\cup\,]-1\,;\,0]\,\cup\left[\frac{3}{5}\,;+\infty\right[$$

Exercice 4

Équation paramétrique **(4 points)**

1) $f_m(x) = 0$ a une solution double ssi $\Delta = 0$

$\Delta = 4(m+1)^2 - 8(m^2-1) = 4(m^2+2m+1-2m^2+2) = 4(-m^2+2m+3) = 0$

donc $\Delta = 0 \overset{m=-1 \text{ rac. évidente}}{\Leftrightarrow} m = -1$ ou $m = 3$

$f_m(x) = 0$ admet une solution double ssi $m \in \{-1\,;\,3\}$. On a $x_0 \overset{m=-1}{=} 0$ ou $x_0 \overset{m=3}{=} -2$

2) $f_m(x) = 0$ admet deux solutions distinctes de signes contraires ssi $\Delta > 0$ et $P < 0$.

$P = \dfrac{m^2-1}{2} = \dfrac{(m-1)(m+1)}{2}$, on a le tableau de signe suivant : on trouve $m \in]-1\,;\,1[$

m	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
P		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	

3) Comme $a = 2 > 0$, $f_m(x) > 0$ pour tout réel x ssi $\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]3\,;+\infty[$

Exercice 5

Problème **(2 points)**

Soit x et y avec $x > y$ les deux entiers relatifs :

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ xy - (x+y) = 111 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 9 \\ (y+9)y - y - 9 - y) = 111 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 9 \quad (1) \\ y^2 + 7y - 120 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

de (2) : $\Delta = 49 + 480 = 529 = 23^2 > 0$, deux solutions :

$$y_1 = \frac{-7+23}{2} = 8 \text{ ou } y_2 = \frac{-7-23}{2} = -15 < 0 \text{ (non retenu)}$$

de (1) : $x = y + 9 = 8 + 9 = 17$. Les entiers naturels cherchés sont 17 et 8.

EXERCICE 6

Vrai-Faux **(2 points)**

1) **Faux** : si le discriminant et le produit des racines sont positifs, on peut seulement dire que les solutions sont de même signe.
Contre exemple : $(x+1)(x+2)=0 \Leftrightarrow x^2+3x+2=0$
$\Delta = 9-8=1>0$ et $P=2>0$. Les solutions sont -1 et -2 toutes deux négatives.

2) **Vrai** : Il faut déterminer la forme canonique du trinôme $f(x)=ax^2+bx+c$.

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(3)=4 \\ f(5)=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ 9a+3b+c=4 \\ 25a+5b+c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ 9a+3b=3 \\ 25a+5b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ 3a+b=1 \ \ (2) \\ 5a+b=-1 \ \ (3) \end{cases}$$

(2)-(3) : $-2a=2 \Leftrightarrow a=-1$ en remplaçant dans (2) : $b=1-3a=4$
On a alors : $f(x)=-x^2+4x+1=-(x^2-4x-1)=-[(x-2)^2-4-1]=-(x-2)^2+5$
Le sommet de la parabole est bien S(2 ; 5).