# BACCALAURÉAT BLANC

# DE MATHÉMATIQUES

# PREMIÈRE

**Durée de l'épreuve : 2 HEURES**
**Les calculatrices sont AUTORISÉES**

**Coefficient : 8**

ENS. SPÉCIALITÉ

*Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :*

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*

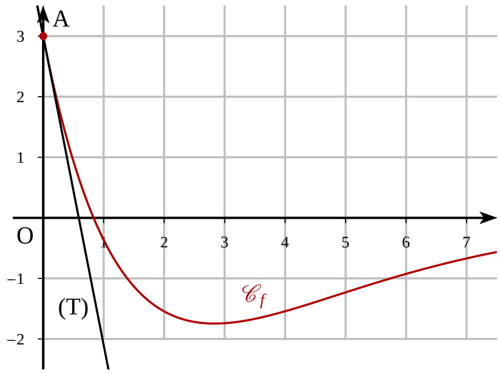
## EXERCICE 1 (5 points)

*Ce QCM comprend 5 questions. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte. Les questions sont indépendantes.*
*Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

1) La dérivée $f'$ de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-x}$ est :

a) $2x\,\mathrm{e}^{-x}$ b) $-2x\,\mathrm{e}^{-x}$ c) $(-2x+3)\,\mathrm{e}^{-x}$ d) $2\mathrm{e}^{-x} + (2x+1)\mathrm{e}^{-x}$

2) Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous. On a représenté la tangente (T) à la courbe au point A.




a) $f'(0) = 3$ b) $f'(0) = \dfrac{1}{5}$ c) $f'(0) = 5$ d) $f'(0) = -5$

3) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = 6x - 5$ est :

a) $S = \{1\,;\,5\}$ b) $S = \{1\}$ c) $S = \varnothing$ d) $S = \{-5\,;\,-1\}$

4) Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^2 + 5x - 4$.
La tangente à la courbe représentative de $g$ au point d'abscisse 2 a pour équation :

a) $y = 14x + 14$ b) $y = 14x - 14$ c) $y = 13x - 15$ d) $y = 13x - 12$

5) Soit la suite arithmétique $(u_n)$ de raison $r = -5$ et telle que $u_1 = 2$.
Quelle est, pour tout entier naturel $n$, l'expression du terme $u_n$ de cette suite :

a) $u_n = 2 - 5n$ b) $u_n = -5 + 2n$ c) $u_n = 7 - 5n$ d) $u_n = 2 \times (-5)^n$

## Exercice 2 (5,5 points)

Lors des journées classées « rouges » selon Bison Futé, l'autoroute qui relie Paris à Limoges en passant par Orléans est surchargée.
Lors de ces journées classées « rouges », on a pu observer le comportement des automobilistes faisant le trajet de Paris à Limoges en passant par Orléans.

- Pour le trajet de Paris à Orléans, 30 % d'entre eux prennent la route nationale, les autres prennent l'autoroute.
- Pour le trajet d'Orléans à Limoges :
  - parmi les automobilistes ayant pris la route nationale entre Paris et Orléans, 40 % prennent la route départementale, les autres prennent l'autoroute ;
  - parmi les automobilistes n'ayant pas pris la route nationale entre Paris et Orléans, 45 % prennent la route départementale , les autres prennent l'autoroute.

On choisit un automobiliste au hasard parmi ceux effectuant, en journée classée rouge, le trajet Paris - Limoges en passant par Orléans et on note :
N l'événement « l'automobiliste prend la route nationale entre Paris et Orléans » et
D l'événement « l'automobiliste prend la route départementale entre Orléans et Limoges ».

1) Construire un arbre de probabilité correspondant à cette situation.
2) Calculer $p(\overline{\mathrm{N}} \cap \overline{\mathrm{D}})$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
3) Montrer que la probabilité que l'automobiliste ne choisisse pas la Route Départementale entre Orléans et Limoge est 0,565.

Lors de ces journées classées « rouges », on donne les temps de parcours suivants :

- Paris - Orléans, par autoroute : 3 heures ;
- Paris - Orléans, par nationale : 2 heures ;
- Orléans - Limoges, par autoroute : 4 heures ;
- Orléans - Limoges, par départementale : 3 heures et demie.

Soit $X$ la variable aléatoire qui associe à l'un de ces trajets son temps de parcours.

4) a) Quelle sont les valeurs prises par $X$.
   b) Déterminer alors la loi de probabilité de $X$.
5) Calculer l'espérance de $X$, arrondie à $10^{-2}$ près, et en donner une interprétation.

## Exercice 3 (4,5 points)

Durant l'été, une piscine extérieure perd chaque semaine 4 % de son volume d'eau par évaporation.
On étudie ici un bassin qui contient 80 m$^3$ après son remplissage.

1) Montrer que ce bassin contient 76,8 m$^3$ d'eau une semaine après son remplissage.
2) On ne rajoute pas d'eau dans le bassin et l'eau continue à s'évaporer. On modélise le volume d'eau contenue dans la piscine par une suite $(v_n)$ : pour tout entier naturel $n$, on note $v_n$ la quantité d'eau en m$^3$ contenue dans la piscine $n$ semaines après son remplissage.
   a) Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Donner l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.
   c) Quelle quantité d'eau, à $10^{-2}$ près, contient le bassin au bout de 7 semaines.
3) Pour compenser en partie les pertes d'eau provoquées par l'évaporation, on décide de rajouter 2 m$^3$ d'eau chaque semaine dans le bassin. On souhaite déterminer au bout de combien de semaines, le volume d'eau contenu dans la piscine devient inférieur à 70 m$^3$.

a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel nbre(70) renvoie le nombre de semaines à partir duquel le volume d'eau de la piscine sera inférieur à 70 m$^3$ .

b) Quel est le nombre de semaines au bout duquel le volume d'eau contenu dans la piscine devient inférieur à 70 m$^3$ ?

```
def nbre(u):
    n=0
    v=80
    while ....:
        n=n+1
        v=...
    return ...
```

## Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par $f(t) = 100t\,\mathrm{e}^{-t}$.

1) Calculer $f(0)$ et $f(5)$ (on arrondira à l'unité).

2) a) Montrer que la fonction dérivée $f'$ peut se mettre sous la forme : $f'(t) = 100(1-t)\,\mathrm{e}^{-t}$

   b) Utiliser cette expression pour étudier le signe de $f'$ sur l'intervalle $[0\,;5]$.

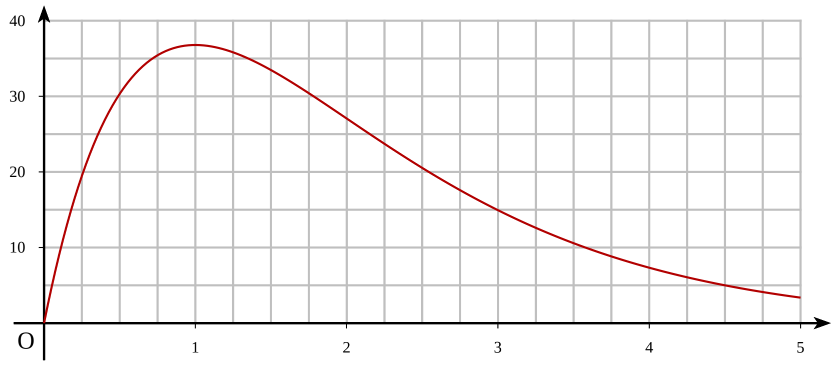
   c) En déduire le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;5]$.

   d) Pour quelle valeur de $t$ la fonction $f$ admet-elle un maximum ?
   Quelle est la valeur de ce maximum ? (on arrondira à l'unité).

3) Une station pompe l'eau d'une rivière pour la transformer ensuite en eau potable. Lors d'un épisode de pollution, il faut interrompre le pompage en attendant que la vague de pollution soit évacuée par le courant. On étudie ici un épisode de pollution ayant duré 5 heures environ.

   La concentration en polluant, exprimée en milligrammes par litre (mg/L) est modélisée par la fonction $f$ définie précédemment, où $t$ est le temps écoulé depuis le début de l'alerte, exprimé en heures.

   On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.




   Les normes en vigueur indiquent que ce polluant devient dangereux pour la santé si sa concentration dépasse 5 mg/L.

   Lors d'un épisode déclaré de pollution dans la rivière et après arrêt du pompage, à partir de combien d'heures peut-on considérer que la pollution ne représente plus de danger pour la santé ?