

Contrôle de mathématiques

Jeudi 12 février 2026

EXERCICE 1

Divers

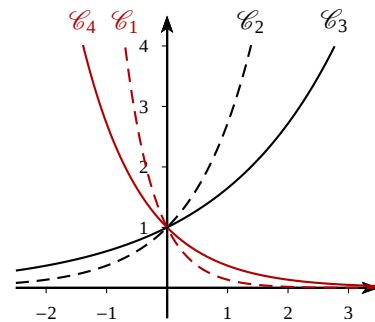
(5 points)

- 1) Simplifier l'écriture : $\frac{e^{x-7}}{e^{2x}} \times \frac{e^{3x+5}}{e^{-2x+1}}$
- 2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2}{e^{-x} + 1} = 2$

- 3) On a tracé les courbes de 4 fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{-x}, \quad h(x) = e^{0.5x}, \quad k(x) = e^{-2x}$$

Associer à chaque fonction la courbe qui lui correspond, en vous justifiant.



- 4) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 1)^2 e^{2x}$.
Montrer que la fonction dérivée f' a pour expression : $f'(x) = 2e^{2x}(x + 1)(x + 2)$.
- 5) Soit la fonction f , de courbe $\mathcal{C}_f$, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}(3 - e^{2x})$.
Montrer que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 0$ a pour équation : $y = -x + 1$

EXERCICE 2

Équations et inéquations

(4 points)

- 1) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ en se justifiant rigoureusement :
 - a) $e^{5x} = \frac{e^{-x}}{e}$
 - b) $4e^{-x} + 7xe^{-x} = 0$
- 2) Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ en se justifiant rigoureusement
 - a) $e^{-3x+1} \leq \frac{e^{-4x}}{e^3}$
 - b) $e^{4x^2} \geq (e^{18})^2$

EXERCICE 3

Fonctions

(5 points)

- 1) Soit la fonction f définie sur $[0; 5]$ par : $f(x) = (2x - 3)e^{-x+1}$.
 - a) Montrer que sur $[0; 5]$, on a : $f'(x) = (5 - 2x)e^{-x+1}$.
 - b) Résoudre $f'(x) = 0$ et déterminer le signe de $f'(x)$.
Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 5]$.
Préciser les valeurs exactes des bornes et des extremums éventuels.

- c) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.
- d) La courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
Si oui en quel(s) point(s) ?
- 2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$
Montrer que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4

Taux d'alcoolémie

(6 points)

Le taux d'alcoolémie est la quantité d'alcool pur par litre de sang s'exprimant en gramme par litre. Soit $f(t)$ le taux d'alcoolémie après un temps t en heure d'une personne ayant absorbé une quantité d'alcool.

On établit que : $f(t) = 4te^{-t}$ avec $t \in [0; 5]$

- 1) Quelle est le taux d'alcoolémie au bout d'une demi-heure ?
On donnera le résultat à 10^{-3} près.
- 2) Calculer la fonction dérivée $f'(t)$.
- 3) Résoudre $f'(t) = 0$ puis dresser le tableau de variation sur $[0; 5]$.
- 4) Quel est le taux d'alcoolémie maximum en gramme par litre à 10^{-3} près ?
- 5) Pour prendre la route en voiture une personne doit avoir un taux d'alcoolémie inférieur ou égal à $0,5 \text{ g/l}$.
On voudrait déterminer le temps $t_1 \geq 1$ nécessaire pour que son taux d'alcoolémie soit inférieur ou égal à $0,5 \text{ g/l}$.
 - a) Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il donne ce temps t_1 au quart d'heure près.
 - b) Rentrer ce programme dans votre calculatrice puis donner le résultat obtenu. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

```
from math import *
def f(t):
    return 4*t*exp(-t)
t=1
while f(t) > 0.5:
    t=t+...
print(t)
```