Contrôle de mathématiques

Correction du mardi 11 janvier 2011

Exercice 1

Résolution graphique (7 points)

1) Déterminer graphiquement les images suivantes : (1 pt)

   $f(-5) = -2$, $f(-3) = 0$, $f(0) = 1$, $f(2) = 5$ et $f(3) = 3$

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f. (1 pt)

x	-5		-4		-2		2		4
$f(x)$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5	$\searrow$	0

3) Résoudre graphiquement, avec la précision permise par la représentation, les équations suivantes (on expliquera la démarche suivie pour la première équation) (2 pts)

   a) $f(x) = 3$

   On cherche les abscisses des points d'intersection entre la courbe et la droite horizontale $y = 3$. On trouve alors 2 solutions :

   $$S = \{0,7 \ ; \ 3\}$$

   b) $f(x) = 0$ 4 solutions :

   $$S = \{-4,75 \ ; \ -3 \ ; \ -0,35 \ ; \ 3,75\}$$

   c) $f(x) = 2$ 3 solutions

   $$S = \{-4 \ ; \ 0,35 \ ; \ 3,2\}$$

   d) $f(x) = -3$ Il n'y a pas de solution

4) Résoudre graphiquement, avec la précision permise par la représentation, les inéquations suivantes (on expliquera la démarche suivie pour la première inéquation) (2 pts)

   a) $f(x) \geqslant 0$

   On cherche les abscisses des points de la courbe qui sont au dessus ou sur l'axe des abscisses. On trouve alors :

   $$S = [-4,75 \ ; \ -3] \cup [-0,35 \ ; \ 3,75]$$

b) $f(x) < 3$ on trouve :

$$S = [-5\ ;\ 0,7[\cup]3\ ;\ 4]$$

c) $f(x) \geqslant 2$ on trouve :

$$S = \{-4\} \cup [0,35\ ;\ 3,2]$$

5) a) Quel est le minimum de f sur $[-5; 4]$ (0,5 pt)

Le minimum est : -2

b) Quel est le maximum de f sur $[-5; 0]$ (0,5 pt)

Le maximum est : 2

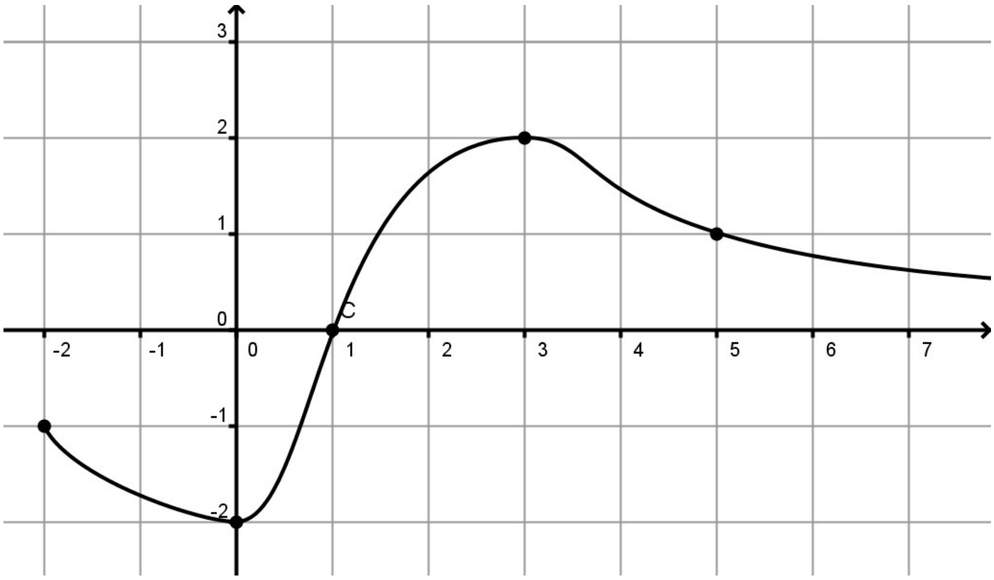
Exercice 2

Tracer une courbe (2 points)

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ? (0,5 pt)

L'ensemble de définition est : $D_f = [-2; +\infty[$

2) Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f à partir de son tableau de variation et des renseignements données. (1 pt)



3) Quel est le signe de la fonction f sur son ensemble de définition ? (0,5 pt)

f est négative sur $[-2; 1[$, nulle en 1 et positive sur $]1; +\infty]$

Exercice 3

Fonction affine (3 points)

Déterminer le expressions des fonctions affines suivantes définie par :

1) $f(2) = -1$ et $f(5) = 5$

On calcule le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b par :

$$a = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{5 - (-1)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$
$$b = f(2) - a \times 2 = -1 - 4 = -5$$

On a alors : $f(x) = 2x - 5$

2) $g(-2) = 1$ et $g(7) = -5$

On calcule le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b par :

$$a = \frac{g(7) - g(-2)}{7 - (-2)} = \frac{-5 - 1}{9} = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}$$
$$b = g(-2) - a \times (-2) = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

On a alors : $g(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

3) $h(-5) = 4$ et $h(-1) = -8$

On calcule le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b par :

$$a = \frac{h(-1) - h(-5)}{-1 - (-5)} = \frac{-8 - 4}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$
$$b = h(-5) - a \times (-5) = 4 - 15 = -11$$

On a alors : $h(x) = -3x - 11$

Exercice 4

Fonctions affines et droites (2 points)

Voici quatre droites tracées dans un repère orthonormal. Donner l'expression de chacune des fonctions affines f_1, f_2, f_3 et f_4 associées à ces 4 droites. On ne demande pas de justification.

On obtient les 4 expressions suivantes :

$$f_1(x) = -2x$$
$$f_2(x) = \frac{4}{3}x - 2$$
$$f_3(x) = \frac{1}{2}x - 1$$
$$f_4(x) = -\frac{2}{3}x - 1$$

Exercice 5

Facturation (6 points)

1) Calculer $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$. (1,5 pts)

   On obtient :

$$f_1(x) = 0,25x + 30 \quad , \quad f_2(x) = 0,75x + 15 \quad , \quad f_3(x) = 0,5x + 20$$

2) Resoudre les équations suivantes : (1,5 pts)

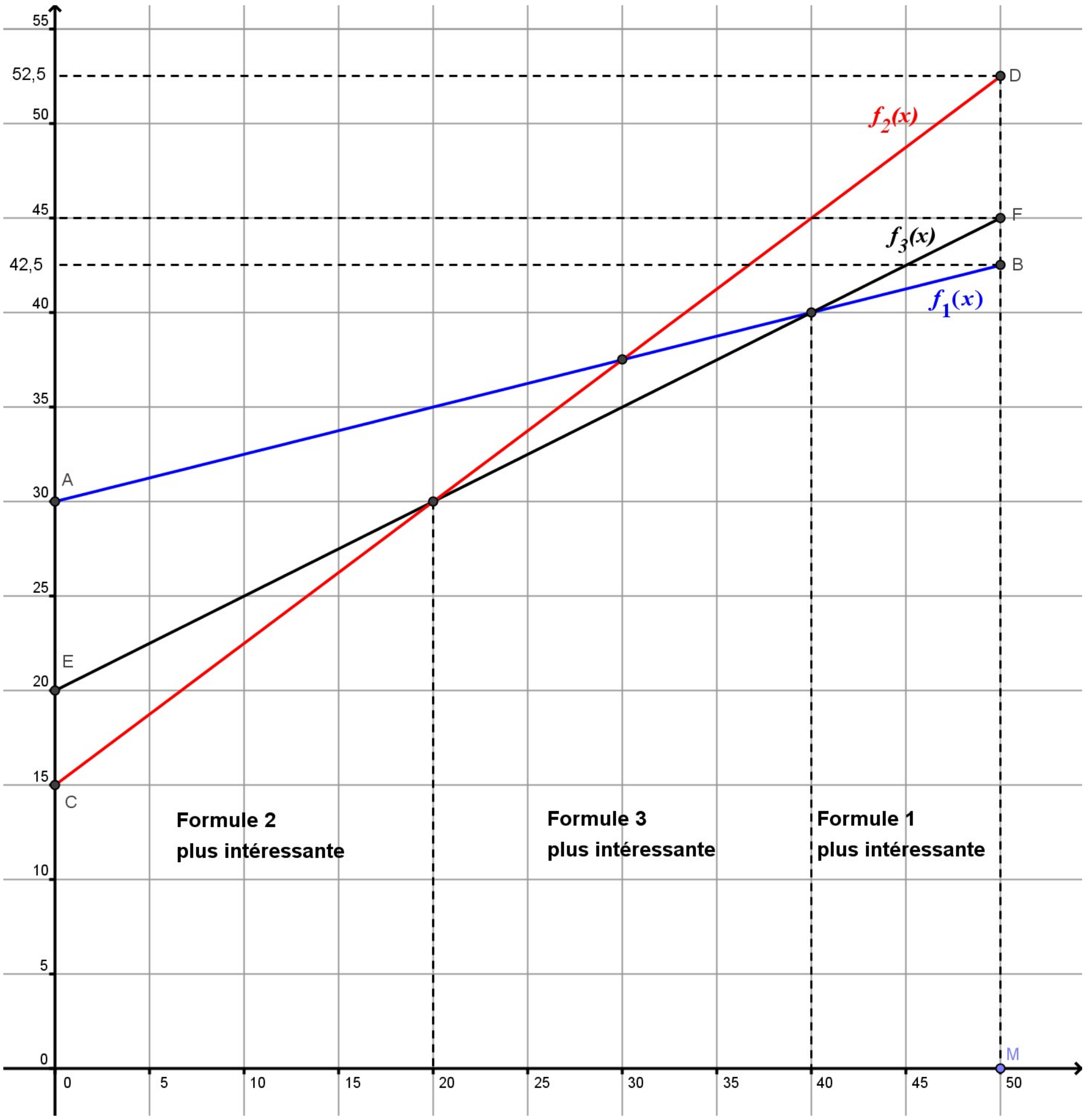
   On obtient les résolutions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_2(x) \\ 0,25x + 30 &= 0,75x + 15 \\ -0,5x &= -15 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_3(x) \\ 0,75x + 15 &= 0,5x + 20 \\ 0,25x &= 5 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_3(x) \\ 0,25x + 30 &= 0,5x + 20 \\ -0,25x &= -10 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

3) Représenter dans un repère les trois fonctions pour $x \in [0; 50]$. On prendra comme unité 1 cm = 5 sur les deux axes. (1,5 pts)



On obtient les points des droites avec :

- $f_1(0) = 30$ et $f_1(50) = 42,5$, on a alors les points : $A(0; 30)$ et $B(50\ ;\ 42,5)$
- $f_2(0) = 15$ et $f_2(50) = 52,5$, on a alors les points : $C(0; 15)$ et $D(50\ ;\ 52,5)$
- $f_3(0) = 20$ et $f_3(50) = 45$, on a alors les points : $E(0; 20)$ et $F(50\ ;\ 45)$

4) En utilisant le graphique, donner le tarif le plus intéressant suivant le nombre de minutes dépassant les deux heures de forfait. (1 pt)

   La formule la plus intéressante est :
   - jusqu'à 20 minutes la formule 2
   - de 20 à 40 minutes la formule 3
   - au delà de 40 minutes la formule 1

5) Pour un mois, la personne pense dépasser de 25 minutes en moyenne les deux heures de forfait. Quel formule doit-elle choisir ? (0,5 pt)

   Elle devra alors choisir la formule 3