Correction du contrôle

Du lundi 5 mars 2012

Exercice 1

ROC (3 points)

1) Démontrer que la fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

   Voir le cours

   a) $f(-x) = 2(-x)^4 + 5(-x)^2 + 1 = 2x^4 + 5x^2 + 1 = f(x)$.

      Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = f(x)$, la fonction f est donc paire.

   b) La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 2

Fonction du second degré (4 points)

1) On peut partir de la forme développée et chercher la forme canonique ou partir de la forme canonique et développer. La première méthode donne :

$$f(x) = x^2 - 20x + 16 = (x-10)^2 - 100 + 16 = (x-10)^2 - 84$$

2) On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	10	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	-84	$\nearrow$ $+\infty$

3) a) 7 et 9 appartiennent à l'intervalle $]-\infty; 10]$ où la fonction f est strictement décroissante, on a donc : $f(7) > f(9)$

   b) la fonction f n'est pas monotone sur l'intervalle $[9; 12]$, cependant, on sait que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rappart à l'axe $x = 10$ où la fonction f admet un minimum ; on a donc : $f(9) < f(12)$

4) La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est une parabole. Elle est tournée vers le haut et son sommet S a comme coordonnées $S(10; -84)$

Exercice 3

Courbes (2 points)

- $f_1(x) = x^2 + 2x - 2$. on a $f_1(0) = -2$, donc la parabole qui représente f_1 passe par le point de coordonnées $(0; -2)$. La seule parabole qui passe par ce point est $\mathscr{C}_1$.

- $f_2(x) = -\dfrac{1}{2}(x-2)^2 + 2$. Donc la parabole qui représente f_2 a pour sommet S de coordonnées $(2;2)$ (qui est de plus dirigée vers le bas). La seule parabole qui passe par S est $\mathscr{C}_4$
- $f_3(x) = (x-1)^2 - 2$. Donc la parabole qui représente f_3 a pour sommet S' de coordonnées $(1;-2)$ (qui est de plus dirigée vers le haut). La seule parabole qui passe par S' est $\mathscr{C}_2$
- $f_4(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$. On a $f(0) = 1$ donc la parabole qui représente f_4 passe par le point de coordonnées $(0;1)$. La seule parabole qui passe par ce point est $\mathscr{C}_3$.

Exercice 4

Problème et algorithme (5 points)

1) En langage TI 82 cel donne :

```
: Prompt N.
: 0 → I.
: While N > I
: I + 1 → I
: N − I → N
: End
: Disp I,N
```

2) Les nombres I et N pour la dernière instruction : "Afficher I et N" représente respectivement le nombre de couches nécessaires et le reste de tuyaux n'ayant pu être rangé

3) Nombre de couches pour 153 tuyaux : 17 (il ne reste aucun tuyau)

   Nombre de couches pour 435 tuyaux : 29 (il ne reste aucun tuyau)

4) Avec 1 000, on peut faire 44 couches. Il restera alors 10 tuyaux.

Exercice 5

Algorithme (2 points)

On peut faire un tableau pour déterminer les valeur de A à chaque boucle.

I	1	2	3	$\dots$	7
$10A + I$	$10 \times 0 + 1$	$10 \times 1 + 2$	$10 \times 12 + 3$	$\dots$	$10 \times 123\,456 + 7$
A	1	12	123	$\dots$	1 234 567

On voit donc à l'écran :

1
12
123
1 234
12 345
123 456
1 234 567

Exercice 6

La méthode d'al-Khuwarizmi (4 points)

1) a) On utilise le précèdé de la forme canonique :

$$x^2 + 10x = 96 \quad \Leftrightarrow \quad (x+5)^2 - 25 = 96 \quad \Leftrightarrow \quad (x+5)^2 = 121$$

b) Cette équation du second dégré admet deux solutions :

$$x + 5 = 11 \quad \text{ou} \quad x + 5 = -11 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 \quad \text{ou} \quad x = -16$$

La solution positive est donc $x = 6$

Déroulons maintenant l'algorithme donné, on trouve les valeurs successives :

$\dfrac{10}{2} = 5$ $\quad 5^2 = 25$ $\quad 25 + 96 = 121$ $\quad \sqrt{121} = 11$ $\quad 11 - 5 = 6$

On retrouve donc la valeur trouvée.

2) Déroulons l'algorithme donné avec comme valeur de départ 8. On trouve les valeurs successives :

$\dfrac{8}{2} = 4$ $\quad 4^2 = 16$ $\quad 16 + 2\,009 = 2\,025$ $\quad \sqrt{2\,025} = 45$ $\quad 45 - 4 = 41$

La solution positive de l'équation est donc : 41

On peut retrouver cette solution par la forme canonique :

$$x^2 + 8x = 2\,009 \quad \Leftrightarrow \quad (x+4)^2 - 16 = 2\,009 \quad \Leftrightarrow \quad (x+4)^2 = 2\,025$$

Cette équation du second dégré admet deux solutions :

$$x + 4 = 45 \quad \text{ou} \quad x + 4 = -45 \quad \Leftrightarrow \quad x = 41 \quad \text{ou} \quad x = -49$$

On retrouve donc la solution positive de 41