Correction du contrôle

du lundi 14 mai 2012

Exercice 1

Relation de Chasles **(2 points)**

1) On a :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA})\\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}\\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{DA}\\ &= \overrightarrow{DA}\end{aligned}$$

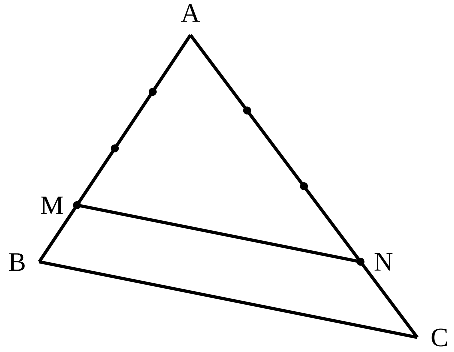
2) On a :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}\\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{AA} = \vec{0}\end{aligned}$$

Exercice 2

ABC est un triangle. **(2,5 points)**

1) On obtient la figure suivante :



2) a) On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}\\ &= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}\\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{3}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et donc (MN)//(BC). C'est la réciproque du théorème de Pythagore.

Exercice 3

Coordonnées **(2,5 points)**

1) $\overrightarrow{AB} = (-6; -1)$ $\overrightarrow{AC} = (-7; 3)$
2) $\overrightarrow{AM} = (x-4; y-2)$
3) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$, on obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} x - 4 = -12 + 21 \\ y - 2 = -2 - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \quad M \begin{cases} x = 13 \\ y = -9 \end{cases}$$

Exercice 4

Alignement et parallélisme **(3 points)**

1) On calcule : $\overrightarrow{AB} = (7; 4)$ et $\overrightarrow{AC} = (9; 5)$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 35 - 36 = -1 \neq 0$$

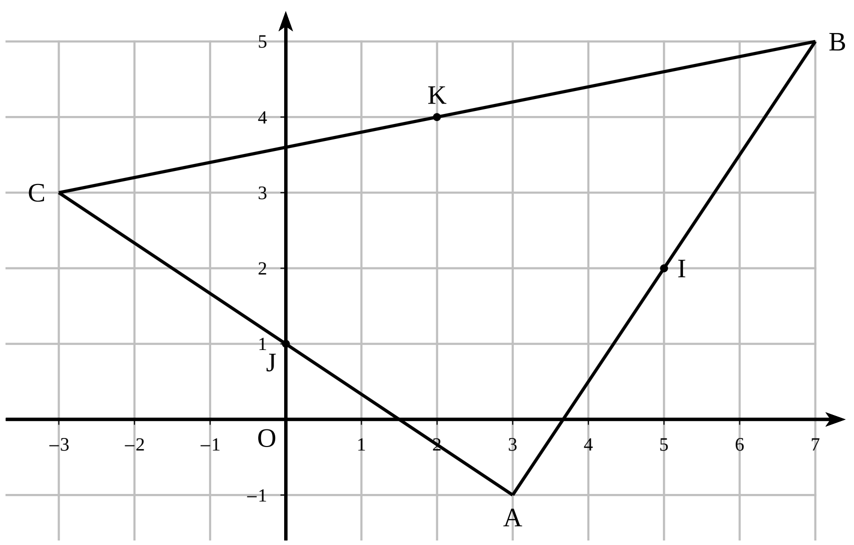
Le déterminant est non nul, les vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) On calcule : $\overrightarrow{AB} = (4; 2)$ et $\overrightarrow{CD} = (-2; -1)$
On a donc : $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires donc les droite (AB) et (CD) sont parallèles.
Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Exercice 5

Triangle **(4 points)**

1) On obtient la figure suivante :



2) On obtient I(5; 2) J(0; 1) K(2; 4)
3) On obtient

$$AB = \sqrt{(7-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$
$$AC = \sqrt{(-3-3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$
$$BC = \sqrt{(-3-7)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{100+4} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

4) On observe que : $BC^2 = AB^2 + AC^2$
D'après la récoproque du théorème de Pythagore le trangle ABC est rectangle en A.

De plus AB = AC , le triangle ABC est donc isocèle rectangle en A.

Exercice 6

Alignement **(3 points)**

1) On a comme coordonnées : $K\left(0; \frac{1}{2}\right)$ $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ et $J\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$
2) On calcule :

$$\det(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} - \frac{2}{12} = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont donc colinéaires et donc les points A, I et J sont alignés.

Exercice 7

Alignement **(3 points)**

1) a) On pose E(x; y), de la relation vectorielle, $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$, on a :

$$\begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 6 \\ y-3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow E\begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

b) C est le milieu de [AF], on a donc la relation $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AC}$, donc

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow F\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

c) De la relation $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 6 \\ y-3 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow G\begin{cases} x = 5 \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

2) E, F et G sont alignés car ces points se situe sur la droite verticale d'équation $x = 5$. Ils ont en effet la même abscisse.