

# Devoir de mathématiques

A rendre le lundi 03 mars 2014

## EXERCICE 1

### Plongeur

(5 points)

- 1)  $f$  est une fonction du second degré,  $\mathcal{P}$  est la parabole représentant  $f$  dans un repère orthogonal.  $\mathcal{P}$  a pour sommet  $S(1; 6, 5)$  et passe par le point  $A(0, 6)$ .
  - a) Déterminer l'expression de la fonction  $f$ .
  - b) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) La trajectoire d'un plongeur, du plongeur jusqu'à son entrée dans l'eau, peut être assimilée à un morceau de cette parabole  $\mathcal{P}$ ,  $x$  représente alors la distance horizontale en mètre entre le plongeur et le plongeur et  $f(x)$  son altitude, en mètres, par rapport à la surface de l'eau.
  - a) Montrer que la fonction  $f$  peut se mettre sous la forme :  $f(x) = -0,5x^2 + x + 6$ .
  - b) A quelle hauteur se trouve le plongeur ?
  - c) Quelle est la hauteur maximale du plongeur ?
  - d) On voudrait connaître une valeur approchée de la distance du plongeur, par rapport au plongeur, lors de son entrée dans l'eau.  
A l'aide de votre calculatrice, déterminer la valeur de  $x$  correspondant à l'entrée dans l'eau du plongeur puis représenter la trajectoire du plongeur, jusqu'à son entrée dans l'eau, sur le graphique en annexe. On prendra quelques points pour tracer cette trajectoire.

## EXERCICE 2

### Forme canonique

(5 points)

On donne les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2 - x - 6 \quad \text{et} \quad g(x) = -2x^2 + 8x - 1$$

- 1) Déterminer les formes canoniques des fonctions  $f$  et  $g$
- 2) Dresser les tableaux de variation des fonctions  $f$  et  $g$
- 3) A l'aide d'une factorisation, résoudre l'équation  $f(x) = 0$

## EXERCICE 3

### Fonction homographique

(5 points)

On donne la fonction homographique suivante :  $f(x) = \frac{3x + 4}{x + 2}$

- 1) Quelle est l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .
- 2) Montrer que l'on peut mettre la fonction  $f$  sous la forme :  $f(x) = 3 - \frac{2}{x + 2}$
- 3) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur son ensemble de définition.

- 4) Compléter l'algorithme suivant permettant pour un  $X$  donné de calculer son image  $Y$  par la fonction  $f$

Trouver un encadrement de  $Y$  sachant que  $1 \leq X \leq 3$  en vous aidant des étapes de cet algorithme.

**Variables** :  $X$  et  $Y$  réels  
**Entrées et initialisation**  
 | Lire  $X$   
**Traitement**  
 |  $X + 2 \rightarrow Y$   
 | .....  $\rightarrow Y$   
 | .....  $\rightarrow Y$   
 | .....  $\rightarrow Y$   
**Sorties** : Afficher .....

### EXERCICE 4

#### Algorithme de Kuwarizmi (voir note)

(5 points)

On donne l'algorithme suivant en pseudo-code

**Variables** :  $A, B, Q, X$   
**Entrées et initialisation**  
 | Lire  $A, B$   
**Traitement**  
 |  $\frac{A}{2} \rightarrow Q$   
 |  $Q^2 \rightarrow X$       valeur  $X_1$   
 |  $X + B \rightarrow X$       valeur  $X_2$   
 |  $\sqrt{X} \rightarrow X$       valeur  $X_3$   
 |  $X - Q \rightarrow X$       valeur  $X_4$   
**Sorties** : Afficher  $X$

- 1) Recopier puis compléter le tableau suivant pour les deux valeurs de  $A$  et  $B$  proposées :

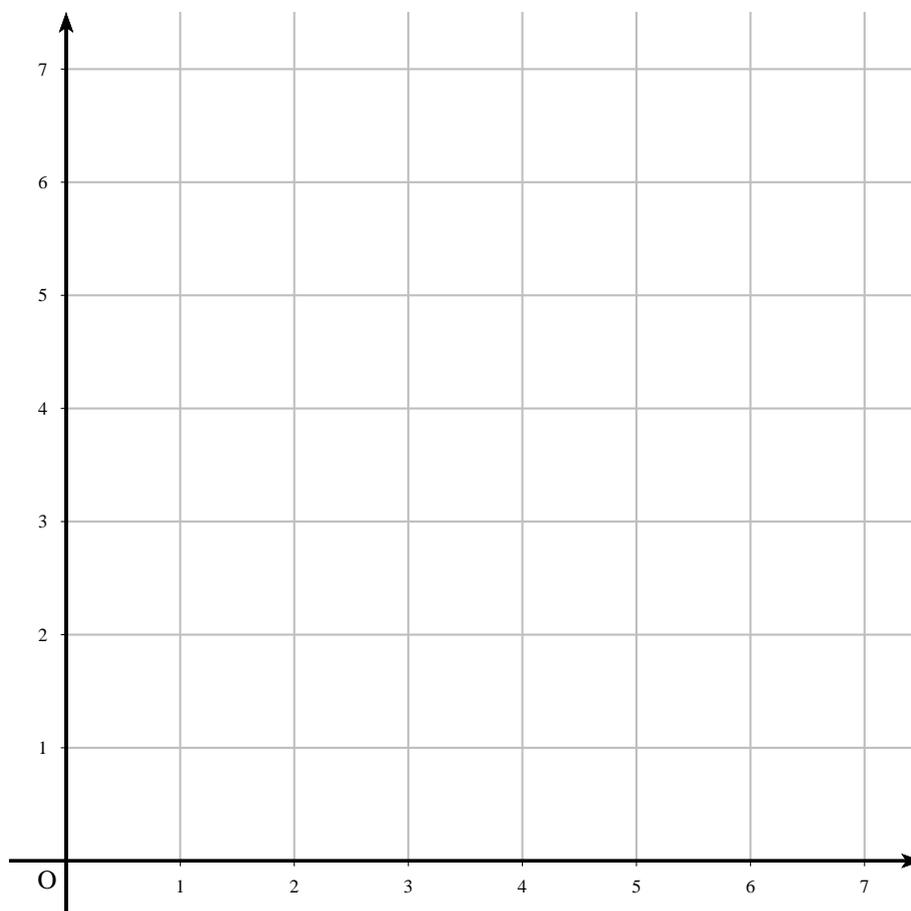
A	B	Q	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	Résultat
10	96						
8	2 009						

- 2) Rentrer cet algorithme dans votre calculatrice et retrouver les résultats du tableau.
- 3) a) Montrer que les équations :  $x^2 + 10x = 96$  et  $x^2 + 8x = 2\,009$  peuvent se mettre sous la forme :  $(x + 5)^2 = 121$  et  $(x + 4)^2 = 2\,025$ .
- b) Résoudre alors ces équations.
- c) Expliquer ce que calcule cet algorithme
- d) Trouver alors, à l'aide du programme de votre calculatrice, la solution positive de l'équation :  $x^2 - 84x = 3565$  en donnant auparavant les valeurs de  $A$  et  $B$  choisies.

**Annexe** (à rendre avec votre copie)

Nom :

Prénom :



**Note** : Mohammed ibn Musa **al-Khwarizmi** (vers 780 - vers 850) est le premier des mathématiciens persans, et sans doute le plus connu. Il vit à Bagdad du temps de la splendeur de la dynastie abbasside. Le calife al-Mamun qui règne sur l'empire encourage les sciences et les arts. Il crée le premier observatoire permanent au monde, il fonde une maison de la sagesse où al-Khwarizmi et d'autres traduisent des textes scientifiques et philosophiques grecs, et étudient, à partir de ceux-ci, astronomie, algèbre et géométrie.

Le premier mérite d'al-Khwarizmi est d'avoir été un formidable passeur de connaissance. Il introduit dans son aire culturelle les connaissances mathématiques indiennes, notamment le système décimal de numération. La traduction latine de son ouvrage *Algorithmi de numero indorum* permit la transmission de ces connaissances jusque dans l'Occident du XII<sup>e</sup> siècle. D'ailleurs, le mot Algorithmi, traduction latine d'al-Khwarizmi, a donné notre "algorithme".

Al-Khwarizmi est aussi un des pionniers de l'algèbre. Dans son traité, *Kitab al jabr w'al muqabalah*, il traite de façon systématique les équations du second degré. En utilisant l'al jabr, littéralement la remise en place, il transforme une soustraction dans un membre en une addition dans l'autre membre, tandis qu'al muqabalah, littéralement le balancement, revient à supprimer dans les deux membres l'addition d'un même terme. Il ramène ainsi toutes les équations du second degré à six équations qu'il sait résoudre. Dans la plus pure tradition euclidienne, il complète ces méthodes algébriques par des résolutions géométriques. C'est le terme al jabr, qui, traduit en latin par algebra, a donné notre mot algèbre.