Correction du devoir de mathématiques

Du lundi 03 mars 2014

Exercice 1

Plongeur **(5 points)**

1) a) Un fonction f du second degré peut se mettre sous la forme : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

- Si le sommet S$(1;6,5)$, on a alors : $\alpha = 1$ et $\beta = 6,5$. L'expression de f est alors : $f(x) = a(x-1)^2 + 6,5$.
- De plus si la parabole $\mathscr{P}$ passe par le point A(0 ;6), alors :

$$f(0) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad a \times (-1)^2 + 6,5 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad a = -0.5$$

Conclusion : $f(x) = -0,5(x-1)^2 + 6,5$

b) On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	6,5	↘ $-\infty$

2) a) On a :

$$f(x) = -0,5(x-1)^2+6,5 = -0,5(x^2-2x+1)+6,5 = -0,5x^2+x-0,5+6,5 = -0,5x^2+x+6$$

b) La hauteur du plongeoir correspond à l'altitude du plongeur quand $x = 0$ soit $f(0) = 6$
Le plongeoir se trouve à 6 m de haut.

c) La hauteur maximale du plongeur est de 6,5 m qui correspond au maximum de la fonction f

d) A l'aide de la calculatrice, on trace la fonction f pour $x \geqslant 0$ et le l'on cherche l'abscisse du point d'intersection de la parabole $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses. On trouve alors à 10^{-2} près $x \simeq 4,61$ m

La trajectoire du plongeur correspond à la parabole $\mathscr{P}$ entre les abscisses 0 et 4,31. On peut prendre comme tableau de valeurs : (*Voir graphique en annexe*)

x	0	1	2	4	4,61
$f(x)$	6	6,5	6	2	0

Exercice 2

Forme canonique **(5 points)**

1) On a :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

$$g(x) = -2(x^2 - 4x) - 1 = -2\left[(x-2)^2 - 4\right] - 1 = -2(x-2)^2 + 8 - 1 = -2(x-2)^2 + 7$$

2) On obtient les tableaux de variation suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\frac{25}{4}$	↗ $+\infty$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	7	↘ $-\infty$

3) On factorise la fonction f puis on résout $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \\ &= \left(x - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) \\ &= (x-3)(x+2) \end{aligned}$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$
$$x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 = 0$$
$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -2$$
$$S = \{-2; 3\}$$

Exercice 3

Fonction homographique **(5 points)**

1) On détermine la valeur interdite : $x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$
On a donc l'ensemble de définition $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

2) On réduit la deuxième forme :

$$3 - \frac{2}{x+2} = \frac{3(x+2) - 2}{x+2} = \frac{3x + 6 - 2}{x+2} = \frac{3x+4}{x+2} = f(x)$$

3) La fonction f est de la forme : $f(x) = \dfrac{a}{x - \alpha} + \beta$ avec $a = -2$, $\alpha = -2$ et $\beta = 3$
On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	3 ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ 3

4) On détermine l'encadrement :

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant x \leqslant 3 \\ 3 &\leqslant x + 2 \leqslant 5 \\ \frac{1}{5} &\leqslant \frac{1}{x+2} \leqslant \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} &\leqslant -\frac{2}{x+2} \leqslant -\frac{2}{5} \\ 3 - \frac{2}{3} &\leqslant 3 - \frac{2}{x+2} \leqslant 3 - \frac{2}{5} \\ \frac{7}{3} &\leqslant f(x) \leqslant \frac{13}{5} \end{aligned}$$

Variables : X et Y réels
Entrées et initialisation
  Lire X
Traitement
  $X + 2 \to Y$
  $\dfrac{1}{Y} \to Y$
  $-2Y \to Y$
  $3 + Y \to Y$
Sorties : Afficher Y

Exercice 4

Algorithme de Kuwarizmi **(5 points)**

1) On obtient le tableau suivant :

A	B	Q	X_1	X_2	X_3	X_4	Résultat
10	96	5	25	121	11	6	6
8	2 009	4	16	2025	45	41	41

2) On obtient bien 6 en rentrant 10 et 8 puis 41 en rentrant 8 et 2 009

3) a) On a : $x^2 + 10x = 96 \quad \Leftrightarrow \quad (x+5)^2 - 25 = 96 \quad \Leftrightarrow \quad (x+5)^2 = 121$
et $x^2 + 8x = 2\,009 \quad \Leftrightarrow \quad (x+4)^2 - 16 = 2\,009 \quad \Leftrightarrow \quad (x+4)^2 = 2\,025$

b) 121 et 2 025 sont respectivement les carrés de 11 et 45. On a alors

$$(x+5)^2 = 121 \quad \Leftrightarrow \quad x+5 = 11 \text{ ou } x+5 = -11 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 \text{ ou } x = -16$$
$$(x+4)^2 = 2\,025 \quad \Leftrightarrow \quad x+4 = 45 \text{ ou } x+4 = -45 \quad \Leftrightarrow \quad x = 41 \text{ ou } x = -49$$

c) Cet algorithme calcule la solution positive de l'équation : $x^2 + \text{A}x = \text{B}$

d) On trouve la solution positive de l'équation $x^2 - 84x = 3\,565$ en rentrant :
$\text{A} = -84$ et $\text{B} = 3\,565$. On trouve alors : $x = 115$

Annexe