Correction contrôle de mathématiques

Jeudi 02 octobre 2014

EXERCICE 1

Décomposition en nombres premiers **(2 points)**

1) On a les décompositions suivantes :

$$\begin{array}{r|l} 3\,780 & 2 \\ 1890 & 2 \\ 945 & 3 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 3528 & 2 \\ 1764 & 2 \\ 882 & 2 \\ 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Donc $3\,780 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$ Donc $3528 = 2^3 \times 3^2 \times 7^2$

2) On obtient donc : $\dfrac{3\,780}{3\,528} = \dfrac{2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7}{2^3 \times 3^2 \times 7^2} = \dfrac{15}{14}$.

EXERCICE 2

Effectuer les calculs suivants en vous justifiant et en donnant le résultat à l'aide d'une fraction irréductible. **(5 points)**

1) $A = \dfrac{3}{4} + \dfrac{6}{5} - \dfrac{7}{10} = \dfrac{15 + 24 - 14}{20} = \dfrac{25}{20} = \dfrac{5}{4}$

2) $B = \dfrac{7}{3} + \dfrac{5}{14} \times \dfrac{21}{20} = \dfrac{7}{3} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{56 + 9}{24} = \dfrac{65}{24}$

3) $C = \dfrac{11}{27} \times \dfrac{36}{34} \times \dfrac{51}{55} = \dfrac{11 \times 9 \times 2^2 \times 3 \times 17}{9 \times 3 \times 17 \times 2 \times 5 \times 11} = \dfrac{2}{5}$

4) $D = \dfrac{\dfrac{1}{3} - 1}{\dfrac{4}{3} + \dfrac{7}{2}} = \dfrac{\dfrac{1-3}{3}}{\dfrac{8+21}{6}} = \dfrac{-\dfrac{2}{3}}{\dfrac{29}{6}} = -\dfrac{2}{3} \times \dfrac{6}{29} = -\dfrac{4}{29}$

5) $E = \dfrac{13^3 \times 5^5 \times 12^3}{15^4 \times 4^2 \times 26^2} = \dfrac{13^3 \times 5^5 \times (2^2 \times 3)^3}{(3 \times 5)^4 \times (2^2)^2 \times (2 \times 13)^2} = \dfrac{13^3 \times 5^5 \times 2^6 \times 3^3}{3^4 \times 5^4 \times 2^4 \times 2^2 \times 13^2}$

$= \dfrac{2^6 \times 3^3 \times 5^5 \times 13^3}{2^6 \times 3^4 \times 5^4 \times 13^2} = \dfrac{13 \times 5}{3} = \dfrac{65}{3}$

EXERCICE 3

Nombres rationnels et nombres décimaux. **(3 points)**

1) Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire comme le rapport de deux entiers. $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel car il ne peut s'écrire comme le rapport de deux entiers. (démonstration par l'absurde)

2) Un nombre rationnel n'est pas un nombre décimal si la décomposition en facteur premier du dénominateur de sa fraction irréductible ne contient pas que des puissances de 2 ou de 5

a) $\dfrac{451}{125} = \dfrac{451}{5^3}$ est un nombre décimal

b) $\dfrac{10}{21} = -\dfrac{10}{3 \times 7}$ n'est pas un nombre décimal

c) $\dfrac{165}{30} = \dfrac{11}{2}$ est un nombre décimal

Exercice 4

Notation scientifique **(3 points)**

1) Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

- $A = 1,284 \times 10^{10}$
- $B = 4,72 \times 10^{-5}$
- $C = 5,923 \times 10^{7}$

2) Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

- $D = 0{,}000\ 074\ 5$
- $E = 24\ 730\ 000$
- $F = 38\ 000$

Exercice 5

Rationnel non décimal. **(4 points)**

1) Le but de cette question est de produire l'écriture décimale périodique de $\dfrac{237}{13}$

a) La 13ᵉ décimale de l'écriture décimale de $\dfrac{131}{21}$ est : 2 (B15)

b) $\dfrac{131}{21} = 6,\overline{238\ 095}$.

c) Lorsque l'on divise par 21, on ne peut avoir que 20 restes non nuls possibles. Le premier reste est en A2, donc en A(2 + 20) = A22 (21ᵉ reste) est un reste déjà obtenu. Il s'agit de 17

d) Par contre, on ne pouvait prévoir que l'on obtiendrait un reste déjà obtenu avant le 20ᵉ reste. Le "5" en A8 n'était pas prévisible.

2) a) On calcule : $100\,a - a = 1336,\overline{36} - 13,\overline{36} = 1323$

b) On en déduit alors que : $99a = 1323 \quad \Leftrightarrow \quad a = \dfrac{1323}{99} = \dfrac{147}{11}$

Exercice 6

Radicaux **(3 points)**

1) $A = 3\sqrt{48} + 5\sqrt{12} - 4\sqrt{75} = 12\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 20\sqrt{5} = 2\sqrt{3}$

$$B = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3})^2}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - 2\sqrt{6} + 3}{2 - 3} = -5 - 2\sqrt{6}$$

2) $C = (2\sqrt{5} - 3)^2 = (2\sqrt{5})^2 - 12\sqrt{5} + 9 = 20 - 12\sqrt{5} + 9 = 29 - 12\sqrt{5}$