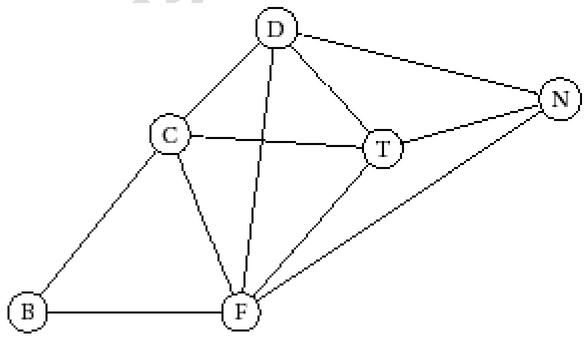
GRAPHES - EXERCICES CORRIGES
Compilation réalisée à partir d'exercices de BAC TES

Exercice n°1.

Un groupe d'amis organise une randonnée dans les Alpes.
On a représenté par le graphe ci-dessous les sommets B, C, D, F, T, N par lesquels ils peuvent choisir de passer.
Une arête entre deux sommets coïncide avec l'existence d'un chemin entre les deux sommets.

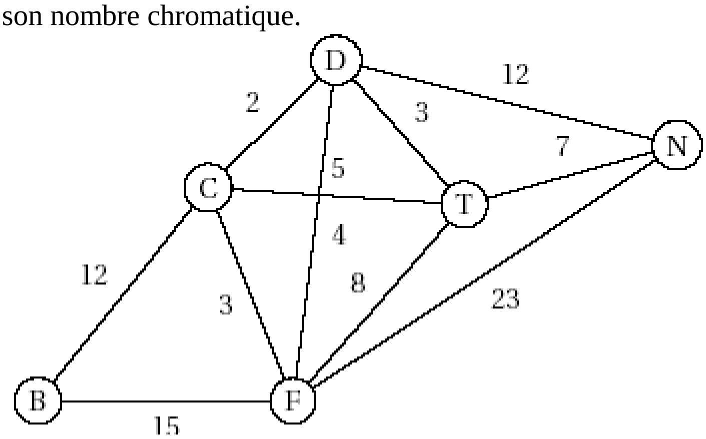


1) a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommets	B	C	D	F	N	T
Degré des sommets du graphe						

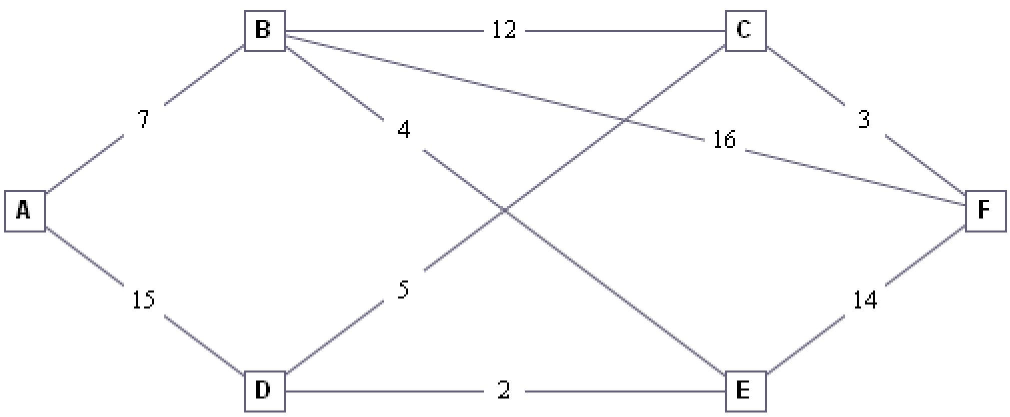
b) Justifier que le graphe est connexe.
2) Le groupe souhaite passer par les six sommets en passant une fois et une seule par chaque chemin.
Démontrer que leur souhait est réalisable. Donner un exemple de trajet possible.
3) Le groupe souhaite associer chaque sommet à une couleur de sorte que les sommets reliés par un chemin n'ont pas la même couleur. On note n le nombre chromatique du graphe.
a) Montrer que $4 \leq n \leq 6$
b) Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique.

4) Le groupe se trouve au sommet B et souhaite se rendre au sommet N. Les distances en kilomètres entre chaque sommet ont été ajoutées sur le graphe.
Indiquer une chaîne qui minimise la distance du trajet.
Justifier la réponse.



Exercice n°2.

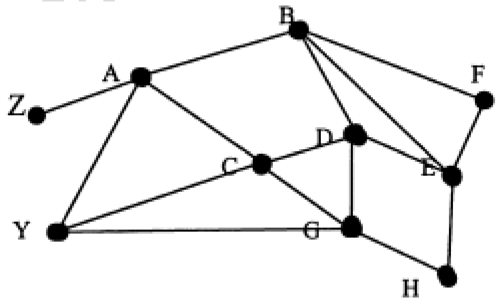
Une agence de voyages organise différentes excursions dans une région du monde et propose la visite de sites incontournables, nommés A, B, C, D, E et F.
Ces excursions sont résumées sur le graphe ci-dessous dont les sommets désignent les sites, les arêtes représentent les routes pouvant être empruntées pour relier deux sites et le poids des arêtes désigne le temps de transport (en heures) entre chaque site.



1) Justifier que ce graphe est connexe.
2) Un touriste désire aller du site A au site F en limitant au maximum les temps de transport.
a) En utilisant un algorithme, déterminer la plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet F.
b) En déduire le temps de transport minimal pour aller du site A au site F.

jgcuaz@hotmail.com

3) Un touriste désirant apprécier un maximum de paysages souhaite suivre un parcours empruntant toutes les routes proposées une et une seule fois. Si ce parcours existe, le décrire sans justifier ; dans le cas contraire justifier qu'un tel parcours n'existe pas.



Exercice n°3.

Première partie : Etude d'un graphe

On considère le graphe ci-dessus.

1) a) Ce graphe est-il connexe ?

b) Déterminer le degré de chacun des sommets.

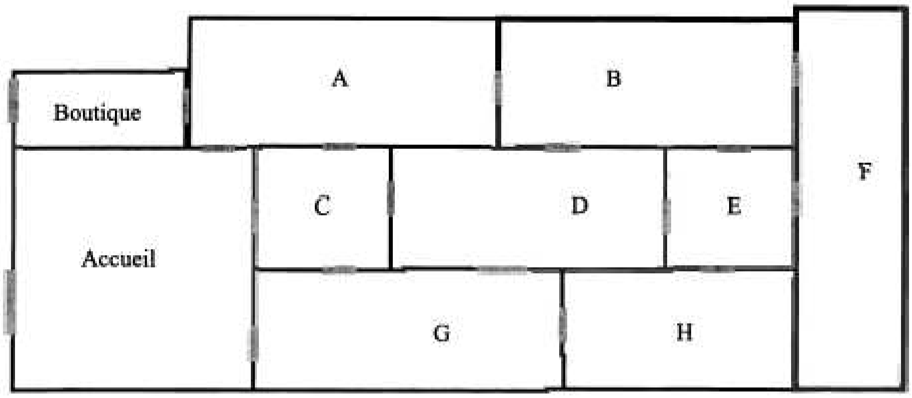
On pourra donner le résultat sous forme d'un tableau

c) Justifier l'existence d'une chaîne eulérienne.

2) a) Déterminer un encadrement du nombre chromatique de ce graphe.

b) Montrer que ce nombre chromatique est égal à 3

Deuxième partie : Visite d'n musée



Voici le plan d'un musée : les parties grisées matérialisent les portes et les visiteurs partent de l'accueil, visitent le musée et doivent terminer leur visite à la boutique.

1) Représenter la situation à l'aide d'un graphe en précisant ce que représentent arêtes et sommets.

2) a) Pourquoi est-il possible de trouver un circuit où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes ?

b) Donner un exemple d'un tel circuit.

3) Comment colorier les salles y compris l'accueil et la boutique, en utilisant un minimum de couleurs, pour que 2 salles qui communiquent par une porte aient des couleurs différentes ?

Exercice n°4.

Une grande ville a créé un jardin pédagogique sur le thème de l'écologie, jardin qui doit être visité par la suite par la majorité des classes de cette ville.

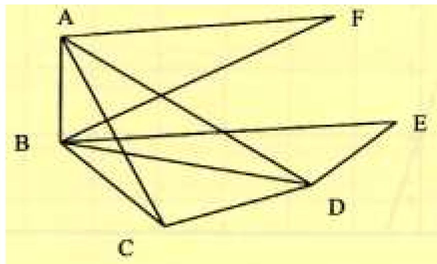
Ce jardin comporte six zones distinctes correspondant aux thèmes :

A. Eau B. Economie d'énergie C. Plantations et cultures locales

D. Développement durable E. Biotechnologies F. Contes d'ici (et d'ailleurs)

Ces zones sont reliées par des passages (portes) où sont proposées des questionnaires.

Le jardin et les portes sont représentés par le graphe ci-dessous (chaque porte et donc chaque questionnaire est représenté par une arête)



Question préliminaire :

Si un visiteur répond à tous les questionnaires, à combien de questionnaires aura-t-il répondu ?

Partie A :

1) Donner la matrice G associée à ce graphe

2) Le graphe est-il complet ? Est-il connexe ? Justifier

3) Peut-on parcourir le jardin en répondant à tous les questionnaires et sans repasser deux fois devant le même questionnaire :

a) En commençant la visite par n'importe quelle zone ?

b) En commençant la visite par la zone C (plantations et cultures) ? Dans ce cas, si la réponse est positive, quelle sera la dernière zone visité.

(Dans les deux cas, a et b, justifiez votre réponse.)

Partie B :
Pour illustrer chaque zone et présenter légendes et commentaires, les enfants ont décidé d'utiliser des supports de couleurs différentes.
Pour limiter le nombre de couleurs, on utilise des couleurs différentes seulement si les zones sont limitrophes (avec un passage entre les deux).
1) Donner et justifier un encadrement du nombre chromatique de ce graphe.
2) Déterminer alors en utilisant un algorithme adapté le nombre chromatique de ce graphe et proposer une répartition des couleurs.

Exercice n°5.

On considère une population donnée d'une île de Bretagne se rendant régulièrement sur le continent. Deux compagnies maritimes A et B effectuent la traversée.
En 2008, 60 % de la population voyage avec la compagnie A. Les campagnes publicitaires font évoluer cette répartition. Une enquête indique alors que chaque année 20 % des clients de la compagnie A l'abandonnent au profit de la compagnie B et que 10 % des clients de la compagnie B choisissent la compagnie A.
Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de l'année 2008+n est défini par la matrice ligne $(x_n \ \ y_n)$ où x_n désigne la proportion de la population qui voyage avec la compagnie A et y_n la proportion de la population qui voyage avec la compagnie B.
1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets A et B dans cet ordre.
3. Préciser l'état initial P_0 puis montrer que $P_1 = (0{,}52 \quad 0{,}48)$.
4. Déterminer la répartition prévisible du trafic entre les compagnies A et B en 2011.
5. Déterminer l'état stable et l'interpréter.
6. Montrer que, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = 0{,}7x_n + 0{,}1$.
7. On admet que, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = \dfrac{4}{15} \times 0{,}7^n + \dfrac{1}{3}$
Déterminer la limite de la suite (x_n) et l'interpréter.

Exercice n°6.

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale.
Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité.
L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires.
Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.
Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale. Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10% des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.
La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.
Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $\mathrm{P}_n = (a_n \quad b_n)$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine n.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, A pour Aurore et B pour Boréale.
3. a. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
b. Montrer que la matrice ligne P_1 est égale à $(0{,}3 \ \ 0{,}7)$.
4. a. Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de P_0 et de n.
b. En déduire la matrice ligne P_3. Interpréter ce résultat.
Dans la question suivante, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.
5. Soit $\mathrm{P} = (a \ \ b)$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.
a. Déterminer a et b.
b. Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ? Justifier.

Exercice n°7.

Deux joueurs A et B, amateurs de tennis, décident de jouer une partie toutes les semaines.
- La probabilité que A gagne la partie de la première semaine est 0,7.
- Si A gagne la partie de la semaine n, il garde la même stratégie de jeu la semaine suivante, et la probabilité qu'il gagne alors la partie de la semaine (n+1) est seulement de 0,4.

- Si A perd la partie de la semaine n, il change de stratégie de jeu pour la semaine suivante, et alors, la probabilité qu'il gagne la partie de la semaine (n +1) est de 0,9.
Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'évènement : « A gagne la partie de la $n^{ème}$ semaine », par B_n l'évènement : « B gagne la partie de la $n^{ème}$ semaine», et on note $a_n = p(A_n)$.
Le but de cet exercice est de rechercher la limite de la suite (a_n), en utilisant deux méthodes différentes.

Première méthode : graphe probabiliste

Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par $P_n = (a_n \quad 1-a_n)$ la matrice des probabilités associée à la $n^{\text{ème}}$ semaine.

1. Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste, et donner la matrice M de transition associée à ce graphe.

2. On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,675 & 0,325 \end{pmatrix}$

Quelle est la probabilité pour que A gagne la partie de la $4^{\text{ème}}$ semaine ?

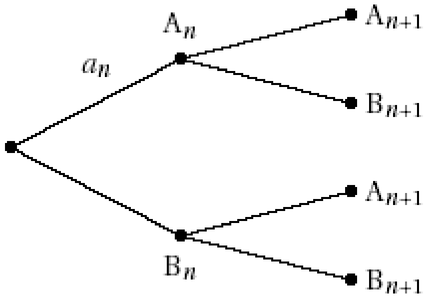
3. Déterminer la matrice ligne $P = (x \quad 1-x)$ telle que $P \times M = P$

4. En déduire la limite de la suite (a_n) et interpréter le résultat obtenu.

Deuxième méthode : probabilité et suites

Dans cette deuxième partie, on ne tient pas compte de résultats démontrés dans la partie précédente.

1. a. Recopier sur votre copie l'arbre ci-dessous, et compléter l'arbre avec les 5 probabilités manquantes.



b. Justifier que $a_{n+1} = 0,9-0,5a_n$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $u_n = a_n - 0,6$.

a. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison (-0,5).

b. En déduire l'expression de a_n en fonction de n, puis la limite de la suite (a_n).

GRAPHES - EXERCICES CORRIGES
CORRECTION

Exercice n°1

1) a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommets	B	C	D	F	N	T
Degré des sommets du graphe	**2**	**4**	**4**	**5**	**3**	**4**

(Rappel : le degré d'un sommet est égal au nombre d'arêtes dont ce sommet est l'extrêmité)

b) Justifier que le graphe est connexe.

Ce graphe est connexe car tous les sommets peuvent être reliés entre eux par (au moins) une chaine.

Par exemple, la chaîne BCDNTF contient tous les sommets.

2) L'existence d'un parcours permettant au groupe de passer par les six sommets en passant une fois et une seule par chaque chemin est liée à l'existence d'une **chaîne eulérienne**.

Puisque deux sommets exactement sont de degré impair et que les autres sont de degré pair, le **théorème d'euler** nous permet d'affirmer l'existence d'une telle chaîne eulérienne, donc d'un tel parcours.

Par exemple, le trajet F-B-C-F-N-T-F-D-C-T-D-N répond au problème.

3) a) Le sommet ayant le plus grand degré est le sommet F, de degré 5.

Le cours nous affirme qu'alors $n \leq 5+1$, c'est-à-dire $n \leq 6$.

De plus, le sous-graphe FCTD, d'ordre 4, étant complet, on aura $n \geq 4$ (il faudra au moins 4 couleurs pour le colorier).

b) On utilise l'algorithme de coloration dit « algorithme glouton » pour colorier le graphe :

Sommet	Degré	Couleur
F	5	Couleur 1
C	4	Couleur 2
D	4	Couleur 3
T	4	Couleur 4
N	3	Couleur 2
B	2	Couleur 4

Le nombre chromatique de ce graphe est donc égal à 4

4) On utilise l'algorithme du plus court chemin de Dijkstra pour déterminer une chaîne qui minimise la distance du trajet enter B et N :

B	C	F	D	T	N	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	**B(0)**
	0+12=12(B)	~~0+15=15(B)~~	∞	∞	∞	**C(12)**
		12+3=15(C)	12+2=14(C)	12+4=16(C)		**D(14)**
		~~14+5=19(D)~~		~~14+3=17(D)~~	~~14+12=26(D)~~	~~**T(17)**~~ **T(16)**
		~~17+8=25(T)~~			16+7=23(T)	**N(23)**

La plus courte chaîne reliant le sommet B au sommet N est donc B-C-T-N, de longueur égale à 23 km.

Exercice n°2

1) Ce graphe est connexe car tous les sommets peuvent être reliés entre eux par (au moins) une chaine. Par exemple, la chaîne ABCDEF contient tous les sommets.

2) a) En utilisant un algorithme, déterminer la plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet F.

On utilise l'algorithme de Dijkstra pour déterminer la plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet F :

A	B	C	D	E	F	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	**A(0)**
	0+7=7(A)	∞	~~0+15=15(A)~~	∞	∞	**B(7)**
		~~7+12=19(B)~~		**7+4=11(B)**	~~*7+16=23(B)*~~ ~~11+14=25(E)~~	**E(11)**
			11+2=13(E)			**D(13)**
		13+5=18(D)				**C(18)**
					18+3=21(C)	**F(21)**

La plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet F est donc A-B-E-D-C-F

b) Le poids de la plus courte chaîne A-B-E-D-C-F reliant le sommet A au sommet F est 21.

Le temps de transport minimal pour aller du site A au site F est donc de 21 heures.

 jgcuaz@hotmail.com

3) Déterminer un parcours empruntant toutes les routes proposées une et une seule fois revient à chercher une chaîne eulérienne dans ce graphe.
Or ce graphe contient quatre sommets de degré impair, à savoir les sommets C, D, E et F qui sont de degré 3.
D'après le théorème d'Euler, il n'existe pas de chaîne eulérienne issue de ce graphe.
Il n'existe donc pas de parcours empruntant toutes les routes proposées une et une seule fois.

Exercice n°3

Première partie : Etude d'un graphe

1) a) Le graphe est connexe car entre tout couple de sommets, il existe au moins une chaîne.
b) Le tableau donnant les degrés de chaque sommet est :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	Y	Z
Degré	4	4	4	4	4	2	4	2	3	1

c) Puisque seuls les deux sommets Y et Z sont de degré impair, le théorème d'Euler affirme l'existence d'une chaîne eulérienne

2) a) Notons χ le nombre chromatique de ce graphe
Le degré maximal atteint par les sommets du graphe est 4. Ainsi $\chi \leq 4+1$, c'est-à-dire $\chi \leq 5$
L'ordre du plus grand sous graphe complet étant de 3 (par exemple le sous-graphe BDE), on aura donc $3 \leq \chi$.
Finalement, un encadrement du nombre chromatique de ce graphe est $\boxed{3 \leq \chi \leq 5}$

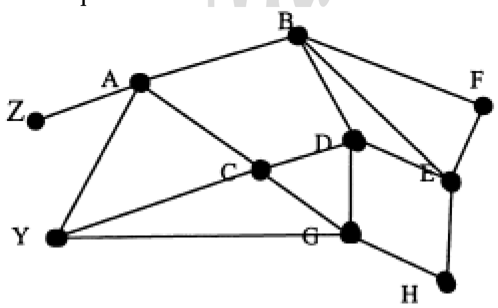
b) On procède à une coloration duc graphe selon l'algorithme de Welch et Powell (ou « Algorithme Glouton ») :

Sommet (ordre décroissant des degrés)	**Degré**	**Couleur**
A	4	Couleur n°1
B	4	Couleur n°2
C	4	Couleur n°2
D	4	Couleur n°3
E	4	Couleur n°1
G	4	Couleur n°1
Y	3	Couleur n°3
F	2	Couleur n°3
H	2	Couleur n°3
Z	1	Couleur n°3

Ce qui montre que le nombre chromatique est égal à 3

Deuxième partie : Visite dun musée

1) Si on représente le musée à l'aide d'un graphe dont les sommets sont les pièces et les arêtes sont les portes permettant de communiquer entre les pièces, on retombe sur le graphe de la partie 1, à condition de désigner par Y l'accueil et par Z la boutique



2) a) Trouver un tel circuit revient à trouver une chaîne eulérienne parcourant ce graphe. D'après la partie 1, une telle chaîne existe.
b) un exemple de tel circuit est la chaîne Y(accueil)-G-C-Y-A-C-D-G-H-E-D-B-E-F-B-A-Z(boutique), qui parcourt une et une seule fois toutes les arêtes du graphe.
3) En reprenant la coloration établie dans la partie 1, si on choisit de colorier :
- d'une première couleur les salles A,E et G
- d'une deuxième couleur les salles B et C
- d'une troisième couleur les salles D,F,H, l'accueil et la boutique,

deux salles communiquant par une porte seront toujours coloriées à l'aide de deux couleurs distinctes.

 jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°4
Question préliminaire : Il y a dix questionnaires car il y a dix arêtes.

Partie A

1) La matrice G du graphe est : $G=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&1\\1&0&1&1&1&1\\1&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&0\end{pmatrix}$

2) Ce graphe est connexe car, pour chaque paire de sommets, il existe une chaîne les reliant.
Ce graphe n'est pas complet car, par exemple, les sommets E et F ne sont pas adjacents.
3) Les degrés des différents sommets sont donnés par le tableau :

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	4	5	3	4	2	2

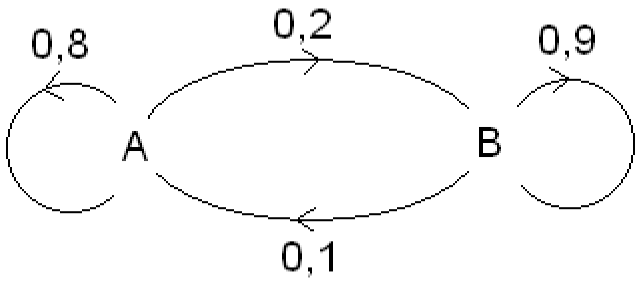
Comme le graphe est connexe et qu'il n'y a que deux sommets de degré impair (B et C), le théorème d'Euler nous permet d'affirmer que ce graphe ne possède qu'une chaîne eulérienne (de B vers C ou de C vers B).
a) On ne peut donc pas parcourir le jardin en répondant à tous les questionnaires et sans repasser deux fois devant le même questionnaire, en commencant la visite par n'importe quelle zone.
b) On en déduit, d'après la question précédente, que **la dernière zone visitée sera la B si on part de la zone C**.

Partie B
1) Le plus grand degré d'un sommet est 5 ; donc le nombre chromatique χ est inférieur ou égal à 6.
{A, B, C, D} est un sous-graphe complet. Donc, le nombre chromatique χ est supérieur ou égal à 4.
Par conséquent, **le nombre chromatique est compris entre 4 et 6**.
2) On procède à une coloration du graphe en utilisant l'algorithme de Welch et Powell (ou algorithme « glouton »), après avoir classé les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré :

Sommet	**Degré**	**Numéro de Couleur**
B	5	1
A	4	2
D	4	3
C	3	4
E	2	2
F	2	4

Le nombre chromatique de ce graphe est 4.

Exercice n°5
1. Entre les deux sommets A et B figurent deux probabilités :
D'après l'énoncé, la probabilité de passer de la compagnie A à la compagnie B est égale à 0,2, donc celle de rester client de la compagnie A est de 1-0,2=0,8.
La probabilité de passer de la compagnie B à la compagnie A est égale à 0,1, donc celle de rester client de la compagnie B est de 1-0,1=0,9.
La situation se traduit donc par le graphe probabiliste suivant :



2. La matrice de transition du graphe probabiliste ci-dessus est : $M=\begin{pmatrix}0,8&0,2\\0,1&0,9\end{pmatrix}$

jgcuaz@hotmail.com

3. L'état initial est la matrice ligne $P_0 = (x_0 \ y_0)$

D'après l'énoncé, puisque « En 2008, 60 % de la population voyage avec la compagnie A », on en conclut que $x_0 = 0,6$, donc que $y_0 = 1 - 0,6 = 0,4$.

L'état initial est donc la matrice ligne $P_0 = (0,6 \ \ 0,4)$

Puisque $P_1 = P_0 \times M$, on calcule :

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,6\times0,8+0,4\times0,1 & 0,6\times0,2+0,4\times0,9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= \begin{pmatrix} 0,52 & 0,48 \end{pmatrix}}$$

4. La répartition prévisible du trafic entre les compagnies A et B en 2011 sera donnée par l'état probabiliste $P_3 = (x_3 \ y_3)$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_n = P_0 \times M^n$, on calcule $P_3 = P_0 \times M^3$

D'après la calculatrice, on obtient :

$$\boxed{P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 0,4248 & 0,5752 \end{pmatrix}}$$

5. L'état stable S = $(x \ y)$ avec $x+y=1$ est solution de l'équation matricielle $S = S \times M$.

Les nombres x et y sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,8x+0,1y \\ y = 0,2x+0,9y \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,2x+0,1y=0 \\ 0,2x-0,1y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$$

Les deux premières lignes du système étant identiques, on résout :

$$\begin{cases} 0,2x-0,1y=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,2x-0,1(1-x)=0 \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,2x+0,1x=0,1 \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3x=0,1 \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

L'état stable est donc $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, $\frac{1}{3}$ des habitants utilisera la compagnie A, contre $\frac{2}{3}$ pour la compagnie B.

6. Si on note $P_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \end{pmatrix}$ l'état probabiliste de l'année 2008+n+1,

L'égalité $P_{n+1} = P_n \times M$ se traduit par : $\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$, donc en particulier :

$x_{n+1} = 0,8x_n + 0,1y_n$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n + y_n = 1$, on en déduit que :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 0,8x_n + 0,1(1-x_n) = 0,8x_n + 0,1y_n - 0,1 = \boxed{0,7x_n - 0,1}$

7. Puisque $-1 < 0,7 < 1$, on aura $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,7^n = 0$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{15} \times 0,7^n = 0$ et par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{15} \times 0,7^n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{3}}$

Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, $\frac{1}{3}$ des habitants utilisera la compagnie A.

jgcuaz@hotmail.com

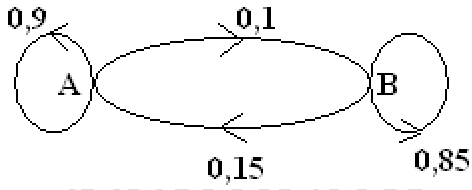
Exercice n°6

1. Puisqu'au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore, on aura $a_0 = 0,2$ donc $b_0 = 0,8$.

La matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial est donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

2. Le graphe probabiliste sera constitué de deux sommets A et B origines et extrémités de deux arêtes orientées et pondérées. L'arête reliant A à B dans le sens A->B sera pondérée par la probabilité qu'une personne préférant Aurore une semaine donnée, ait changé pour Boréale la semaine suivante, soit 0,1.

On obtient ainsi :



3. a. La matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets est égale à :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}}$$

b. On a :

$$P_1 = P_0 M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,2\times 0,9 + 0,8\times 0,15 & 0,2\times 0,1 + 0,8 \times 0,85 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}}$$

4. a. Pour tout entier naturel *n*, $\boxed{P_n = P_0 M^n}$

b. Ainsi, $P_3 = P_0 M^3 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}^3$

A l'aide d'une calculatrice, après avoir défini dans le menu MATRICE, une matrice [A], de dimension 1×2 correspondant à P_0 et une matrice [B], de dimension 2×2 correspondant à M, on calcule :

Ainsi, $\boxed{P_3 = \begin{pmatrix} 0,43125 & 0,56875 \end{pmatrix}}$

On peut estimer qu'au bout de la 3ème semaine de campagne, plus de 43% de la population sera favorable au parfum Aurore.

5. a. L'état stable *P*=(*a* *b*) est solution de l'équation matricielle $P = PM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

De surcroît, on a $a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a$

Les nombres *a* et *b* sont donc solutions du système $\begin{cases} a = 0,9a + 0,15b \\ a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a \end{cases}$ que l'on résout :

$$\begin{cases} a = 0,9a + 0,15b \\ a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,9a + 0,15(1-a) \\ b = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,9a + 0,15 - 0,15a \\ b = 1 - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,25a = 0,15 \\ b = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{0,15}{0,25} \\ b = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,6 \\ b = 1 - 0,6 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a = 0,6 \\ b = 0,4 \end{cases}}$$

L'état stable est donc $\boxed{P = (0,6 \quad 0,4)}$

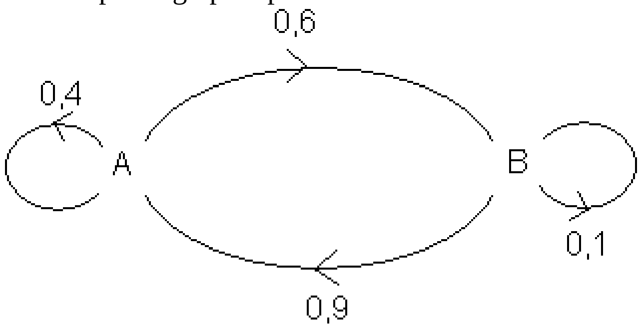
b. On peut donc estimer qu'à terme, 60% de la population sera favorable au parfum Aurore, qui sera donc préféré au parfum Boréale

 jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°7

Première méthode : graphe probabiliste

1. Si on note A et B les deux états « le joueur A gagne la partie » et « le joueur B gagne la partie », la situation ci-dessus se traduit par le graphie probabiliste de sommet A :



où l'énoncé nous a fourni les probabilités conditionnelles $p_A(A)=0,4$ donc $p_A(B)=0,6$ et $p_B(A)=0,9$ donc $p_B(B)=0,1$. La matrice de transition de ce graphe probabiliste est $\boxed{M=\begin{pmatrix}0,4 & 0,6\\ 0,9 & 0,1\end{pmatrix}}$

2. Si on note $P_1=\begin{pmatrix}a_1 & 1-a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\end{pmatrix}$ la matrice des probabilités associée à la 1ère semaine (l'énoncé nous fournit l'indication $p(A_1)=0,7$), alors pour tout entier $n\geq 1$, on aura $P_n=P_1\times M^{n-1}$

La matrice des probabilités associée à la 4ème semaine sera

$$P_4=P_1\times M^3=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,55 & 0,45\\ 0,675 & 0,325\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0,7\times 0,55+0,3\times 0,675 & 0,7\times 0,45+0,3\times 0,325\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0,5875 & 0,4125\end{pmatrix}$$

Ainsi, la probabilité pour que A gagne la partie de la 4ème semaine vaudra $\boxed{p_4=p(A_4)=0,5875}$

3. Notons $P=(x \quad 1-x)$ la matrice ligne (dite « état stable ») telle que $P\times M=P$

L'équation matricielle $P\times M=P$ se traduit par $\begin{pmatrix}x & 1-x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,4 & 0,6\\ 0,9 & 0,1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 1-x\end{pmatrix}$, donc par le système :

$$\begin{cases}x\times 0,4+(1-x)\times 0,9=x\\ x\times 0,6+(1-x)\times 0,1=1-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1,5x=0,9\\ 1,5x=0,9\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{0,9}{1,5}=0,6$$

L'état stable du système est donc la matrice ligne $\boxed{P=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\end{pmatrix}}$

4. Les deux termesde l'état stable $P=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\end{pmatrix}$ représentent successivement $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-a_n$

On vient donc de déterminer que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0,6}$, ce qui signifie qu'au bout d'un grand nombre de parties, la probabilité que le joueur A gagne vaut 0,6

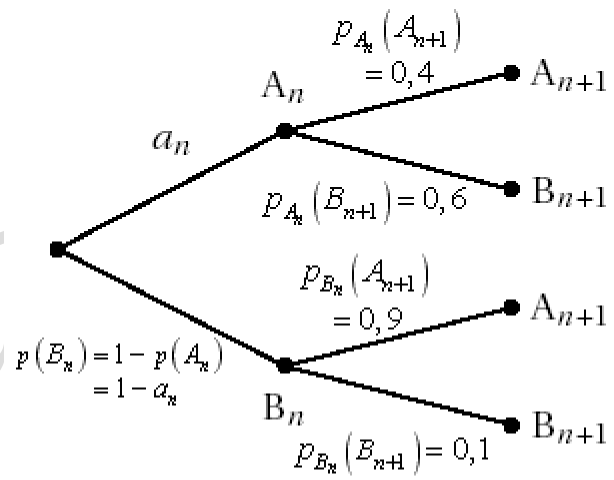
Deuxième méthode : probabilité et suites

1. a. L'énoncé nous fournit les probabilités suivantes :

$p_{A_n}(A_{n+1})=0,4$ donc $p_{A_n}(B_{n+1})=0,6$ et $p_{B_n}(A_{n+1})=0,9$ donc $p_{B_n}(B_{n+1})=0,1$

Enfin, $p(B_n)=1-p(A_n)=1-a_n$

Ces probabilités figurent sur l'arbre pondéré ci-contre :



b. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on applique la formule des probabilités totales au système complet d'événement $(A_n;B_n)$, pour écrire que :

jgcuaz@hotmail.com

$a_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_{n+1})$
$= p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + p(B_n)\, p_{B_n}(A_{n+1})$
$= a_n \times 0,4 + (1 - a_n) \times 0,9 = \boxed{-0,5a_n + 0,9}$

2. a. Pour tout entier $n \geq 1$, on calcule $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6 = -0,5a_n + 0,9 - 0,6 = -0,5a_n + 0,3$

En factorisant par (-0,5), on obtient $\boxed{u_{n+1}} = -0,5\left(a_n + \dfrac{0,3}{-0,5}\right) = -0,5(a_n - 0,6) \boxed{= -0,5u_n}$, ce qui prouve que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison (-0,5).

b. Puisque la suite (u_n) est une suite géométrique de raison (-0,5) et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6 = 0,7 - 0,6 = 0,1$, on écrit : pour tout $n \geq 1$, $u_n = u_1 \times (-0,5)^{n-1} = 0,1 \times (-0,5)^{n-1}$, et puisque pour tout $n \geq 1$, $u_n = a_n - 0,6 \Leftrightarrow a_n = u_n + 0,6$, on conclut que pour tout entier $n \geq 1$, $\boxed{a_n = 0,6 + 0,1 \times (-0,5)^{n-1}}$

Puisque $-1 < -0,5 < 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} (-0,5)^n = 0$ donc par produit puis somme des limites, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 0,6}$

jgcuaz@hotmail.com