Sommes et produits matriciels

1. On considère la matrice : $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Déterminer les matrices :
   $X - 3I_3$ $\quad -(X-3I_3)$
   $I_3 - 2X$ $\quad 4(I_3 - X)$

Solution: $*X - 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} (1-3) & (0-0) & (-1-0) \\ (-1-0) & (2-3) & (3-0) \\ (1-0) & (1-0) & (1-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
$* - (X - 3I_3) = -\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
$*I_3 - 2X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} (1-2) & (0-0) & (0+2) \\ (0+2) & (1-4) & (0-6) \\ (0-2) & (0-2) & (1-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -6 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
$*4(I_3 - X) = 4(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}) = 4\begin{pmatrix} (1-1) & (0-0) & (0+1) \\ (0+1) & (1-2) & (0-3) \\ (0-1) & (0-1) & 1-1) \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & -12 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

2. Soit les matrices :

   $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   Calculer et comparer $A^2 + 2AB + B^2$ et $(A+B)^2$.

Solution: $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 24 & 48 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 20 & 44 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (24 + 2\times 20 + 18) & (48 + 2 \times 44 + 36) \\ (6 + 2 \times 5 + 4) & (12 + 2 \times 11 + 10) \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 82 & 172 \\ 20 & 44 \end{pmatrix}$

$(A+B)^2 = (\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})^2 = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 & 170 \\ 20 & 43 \end{pmatrix}$

On constate que contrairement aux réels, $A^2 + 2AB + B^2 \neq (A+B)^2$.

3. Effectuer les produits suivants lorsque c'est possible, et dans ce cas donner la dimension de la matrice produit. Lorsque c'est impossible, dire pourquoi.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Solution: a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 40 \\ 30 & 51 \\ 36 & 62 \end{pmatrix}$.

Le produit d'une matrice 3x2 par une matrice 2x2 est une matrice 3x2.

b) On ne peut pas faire le produit d'une matrice 2x2 par une matrice 3x2.

c) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 42 & 1 \end{pmatrix}$

Le produit d'une matrice ligne 1x3 par une matrice 3x3 est une matrice ligne 1x3.

d) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 24 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$

Le produit d'une matrice 3x3 par une matrice 3x2 est une matrice 3x2.

e) On ne peut pas faire le produit d'une matrice 3x2 par une matrice 3x2.

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 32 & 38 \\ 28 & 42 & 49 \\ 34 & 64 & 78 \end{pmatrix}$

Le produit d'une matrice carrée 3x3 par une autre matrice carrée 3x3 est une matrice carrée 3x3.

4. On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ où x est un réel.

   Déterminer x pour que $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$.

Solution: $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$
$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^2+2 & x+3 \\ 2x+6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+2 = & 6 \\ x+3 = & 1 \\ 2x+6 = & 2 \end{cases}$, ce qui se produit si et seulement si $x = -2$.