D'après Bac ES Asie 2003

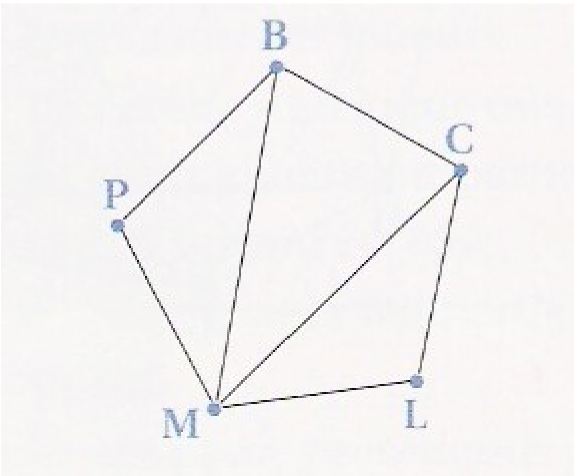
Utiliser le théorème d'Euler en situation

Dans la ville de Graphe, on s'intéresse aux principales rues permettant de relier différents lieux ouverts au public, à savoir la mairie (M), le centre commercial (C), la bibliothèque (B), la piscine (P) et le lycée (L). Chacun de ces lieux est désigné par son initiale. Le tableau ci-dessous donne les rues existant entre ces lieux.

	B	C	L	M	P
B		$\times$		$\times$	$\times$
C	$\times$		$\times$	$\times$	
L		$\times$		$\times$	
M	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$
P	$\times$			$\times$	

1. Dessiner un graphe G représentant cette situation.

Solution: Les sommets du graphe sont les différents lieux de la ville et les arêtes les différentes rues existantes entre ces lieux.



2. Montrer qu'il est possible de trouver un trajet empruntant une fois et une seule toutes les rues de ce plan. Justifier. Proposer un tel trajet.

Solution: Le problème posé revient à chercher dans le graphe G une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien.
Le graphe G est connexe : deux sommets quelconques du graphe peuvent toujours être reliés par une chaîne.
On donne ci-dessous le tableau des degrés des sommets du graphes.

Sommet	B	C	L	M	P
Degré	3	3	2	4	2

Le nombre de sommets de degré impair est 2 : ce sont les sommets B et C.
D'après le théorème d'Euler, le graphe G admet donc une chaîne eulérienne. Les extrémités de la chaîne sont les sommets de degré impair, soit B et C.
Pour déterminer une telle chaîne, on applique l'algorithme du cours et on trouve par exemple, par étapes successives :
Étape 1 : B-P-M-L-C (recherche d'une chaîne d'extrémités B et C)
Étape 2 : on insère le cycle B-M-C-B à la place de B dans la chaîne précédente.
On obtient B-M-C-B à la place de B dans la chaîne précédente.
On obtient B-M-C-B-P-M-L-C.
Étape 3 : toutes les arêtes du graphe ont été utilisées ;
une chaîne eulérienne possible est **B-M-C-B-P-M-L-C**.
Conclusion : d'après ce qui précède, il est possible de trouver un trajet qui emprunte une fois et une seule toutes les rues. Ce chemin possible est **B-M-C-B-P-M-L-C**.

3. Est-il possible d'avoir un trajet partant et arrivant du même lieu et passant une fois et une seule par toutes les rues ?

Solution: La question posée, retraduite en termes de graphe est : le graphe G admet-il un cycle eulérien ?
D'après ce qui précède, G est connexe et tous ses sommets ne sont pas de degré pair donc, d'après le théorème d'Euler, le graphe G n'admet pas de cycle eulérien.
Conclusion : il n'est pas possible d'avoir un trajet partant et arrivant du même lieu et passant une fois et une seule par toutes les rues.

Méthode
1. Bien repérer les éléments du texte qui seront matérialisés par les sommets du graphe et ceux qui seront matérialisés par les arêtes.
2. et **3.** Il faut tout d'abord traduire la question avec le vocabulaire des graphes. Il faut ensuite préciser la connexité du graphe utilisé et dresser le tableau des degrés des sommets, afin de pouvoir identifier la conclusion à donner à l'aide du théorème d'Euler.