

Les nombres complexes

Le point de vue Algébrique

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Un problème historique	2
2	Construction des nombres complexes	3
2.1	Définition	3
2.2	Représentation des nombres complexes	3
2.3	Opérations avec les complexes	4
2.4	Conjugué	5
2.5	Opérations et propriétés du conjugué	5
3	Équation polynomiale à coefficients réels	7
3.1	Équation du second degré	7
3.2	Factorisation et racines d'un polynôme	7
4	Formule du binôme	10

1 Introduction

1.1 Un problème historique

À la fin du XVI^e siècle, l'heure est à la résolution générale des équations du troisième degré. À l'aide d'un changement de variable, bien choisi, toute équation du troisième degré peut se mettre sous la forme

$$x^3 + px + q = 0$$

- Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + px + q$.

f est continue sur \mathbb{R} et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.

- La formule de Cardan donne l'expression de cette solution :

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

- Bombelli, autre mathématicien de l'époque, applique cette formule à l'équation :

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \quad \text{avec } p = -15 \text{ et } q = -4$$

Il obtient alors :

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

Cette formule aboutit à une incompatibilité, à cause de $\sqrt{-1}$.

- Bombelli remarque que s'il pose $(\sqrt{-1})^2 = -1$, il obtient en développant les cubes suivants :¹

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{-1})^3 &= 2^3 - 3(2)^2\sqrt{-1} + 3(2)(\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 - 12\sqrt{-1} + 6(-1) - (-1)\sqrt{-1} = 2 - 11\sqrt{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3(2)^2\sqrt{-1} + 3(2)(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} + 6(-1) + (-1)\sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Il obtient $x_0 = 2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} = 4$,

et constate que 4 est bien solution : $4^3 - 15 \times 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0$

- $\sqrt{-1}$ n'existe pas, mais permet de trouver la solution d'une équation. Il s'agit d'un intermédiaire de calcul. Les nombres complexes étaient nés!!
- Au XVII^e siècle, ces nombres que Descartes appelle imaginaires, deviennent intermédiaires de calcul, mais ne sont pas encore considérés comme des nombres.
- Au XVIII^e siècle, Euler montre que ces nombres peuvent se s'écrire $a + b\sqrt{-1}$. Il propose de noter $\sqrt{-1} = i$. (i comme « imaginaire »).
- Au XIX^e siècle Gauss montre que l'on peut représenter de tels nombres. Ils obtiennent alors le statut de nombres qu'il rebaptise complexes.

1. On rappelle que : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

2 Construction des nombres complexes

2.1 Définition

Définition 1 : On appelle \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

Un nombre complexe z est un nombre s'écrivant sous la forme :

$$z = a + ib \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad i^2 = -1$$

Le nombre réel a s'appelle la **partie réelle** de z notée : $\text{Re}(z)$

Le nombre réel b s'appelle la **partie imaginaire** de z noté : $\text{Im}(z)$.

La forme $z = a + ib$ est appelée **forme algébrique**.

Remarque :

- Si $b = 0$, z est réel donc $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Si $a = 0$, z est un imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.
- La forme algébrique est unique :

$$z = z' \Leftrightarrow a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'$$

$$z = 0 \Leftrightarrow a + ib = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

2.2 Représentation des nombres complexes

Théorème 1 : Soit le repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) appelé **plan complexe**.

À tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut associer un unique point $M(a; b)$ dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) . On dit que z est l'**affixe** de M et on écrit alors $M(z)$.

Remarque : Réciproquement à tout point $M(a; b)$ du plan complexe, on peut associer un unique complexe $z = a + ib$. Cette application est bijective.

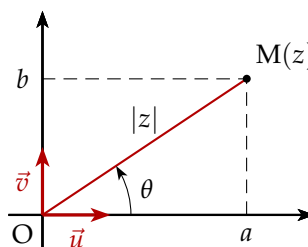
Conséquence On peut représenter tout nombre complexe $z = a + ib$.

L'axe des abscisses est appelé « axe des réels »

L'axe des ordonnées est appelé « axe des imaginaires purs »

On peut aussi repérer le point M par :

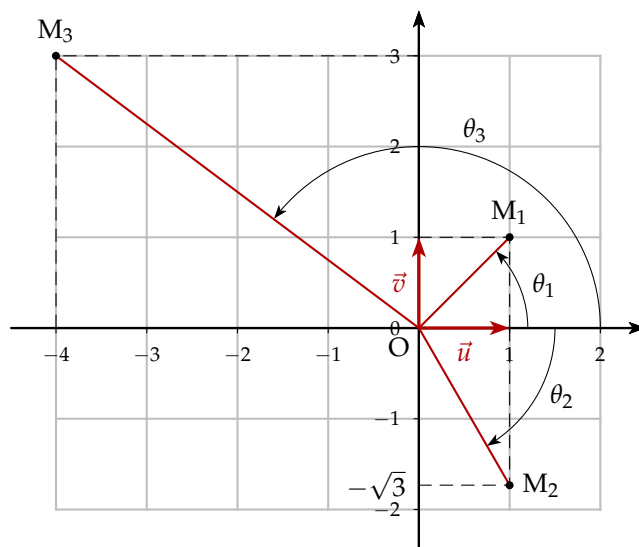
- La distance OM : le **module** de z noté : $|z|$
- L'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta [2\pi]$: l'**argument** de z noté $\arg(z)$.



On a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et pour $z \neq 0$,
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \theta = \arg(z) [2\pi]$$

Exemple : Représenter puis déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_3 = -4 + 3i$

On a les représentations de z_1, z_2 et z_3 suivantes :



$$OM_1 = |z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$OM_2 = |z_2| = \sqrt{1+3} = 2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$OM_3 = |z_3| = \sqrt{16+9} = 5 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos \theta_3 = -\frac{4}{5} \\ \sin \theta_3 = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \theta_3 = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) \approx 143^\circ [2\pi]$$

2.3 Opérations avec les complexes

Definition 2 : Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, on définit deux opérations dans \mathbb{C} :

- L'addition « + » : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- La multiplication « × » : $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

$(\mathbb{C}, +, \times)$ forme un corps commutatif. Il possède donc les mêmes propriétés pour ces deux opérations que dans l'ensemble des nombres réel \mathbb{R} :

- La commutativité et l'associativité de l'addition et de la multiplication ainsi que la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
- L'intégrité (produit nul) : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z' = 0$

Exemples : Soit les opérations suivantes : (retenir que $i^2 = -1$)

$$z_1 = 4 + 7i - (2 + 4i) = 4 + 7i - 2 - 4i = 2 + 3i$$

$$z_2 = (2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i + 2 = 8 - i$$

$$z_3 = (4 - 3i)^2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$$

Remarque : Comparaison de deux complexes : il est possible de définir une relation d'ordre dans \mathbb{C} prolongement de la relation d'ordre dans \mathbb{R} .

On compare les parties réelles et en cas d'égalité, les parties imaginaires.

En notant " \preceq " cette relation : $a + ib \preceq c + id \Leftrightarrow a < c$ ou $(a = c \text{ et } b \leq d)$

On a ainsi : $2 + 5i \preceq 3 - 7i$ et $-1 - i \preceq -1 + 2i$

Cependant cette relation n'est pas "performante" car elle n'est pas compatible avec la multiplication : d'après cette relation : $0 \preceq i \xrightarrow{\times i} 0 \preceq -1$ qui est faux.

On abandonne donc l'idée de comparaison et d'inéquation dans \mathbb{C} !

2.4 Conjugué

Définition 3 : Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

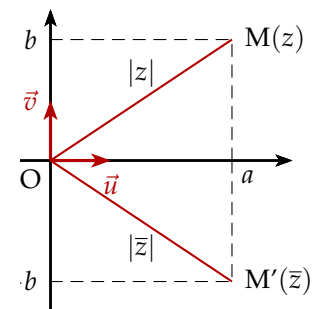
On appelle le nombre **conjugué** de z , le nombre noté \bar{z} tel que : $\bar{z} = a - ib$.

On a alors : $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.

Démonstration : $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - iab + iab + b^2 = a^2 + b^2$

Interprétation géométrique :

$M'(\bar{z})$ symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe des réels.



Applications :

- Trouver la forme algébrique du complexe : $z = \frac{2 - i}{3 + 2i}$

On multiplie haut et bas par le conjugué du dénominateur :

$$z = \frac{(2 - i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{6 - 4i - 3i - 2}{9 + 4} = \frac{4 - 7i}{13} = \frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$$

- Résoudre l'équation suivante : $z = (2 - i)z + 3$

$$z = (2 - i)z + 3 \Leftrightarrow z - (2 - i)z = 3 \Leftrightarrow z(1 - 2 + i) = 3$$

$$z = \frac{3}{-1 + i} = \frac{-3}{1 - i} = \frac{-3(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

2.5 Opérations et propriétés du conjugué

Théorème 2 : Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\overline{\bar{z}} = z, \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}', \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}, \quad z' \neq 0, \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Remarque : Le conjugué de la somme, du produit et du quotient est égal à la somme, au produit et au quotient du conjugué. Les opérations avec le conjugué ne pose aucun problème.

Démonstration : Ces égalités se démontrent sans soucis, en calculant à part le terme de gauche et le terme de droite en posant $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

Exemple : Donner la forme algébrique du conjugué de : $z = \frac{3-i}{1+i}$

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{3-i}{1+i}\right)} = \frac{\overline{3-i}}{\overline{1+i}} = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{1+1} = \frac{3+3i+i-1}{2} = 1+2i$$

Propriété 1 : Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
- z imaginaire pur $\Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$
- $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$
- z réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

Démonstration : On pose $z = a + ib$, on a alors :

$$z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = a + ib - (a - ib) = 2ib = 2i\operatorname{Im}(z)$$

Exemple : Dans le plan complexe, M est le point d'affixe $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$, on pose $Z = \frac{5z-2}{z-1}$

- 1) Exprimer $Z + \bar{Z}$ en fonction de z et \bar{z} .
- 2) Démontrer que : Z imaginaire pur \Leftrightarrow M est sur un cercle privé d'un point

$$\begin{aligned} 1) \quad Z + \bar{Z} &= \frac{5z-2}{z-1} + \overline{\left(\frac{5z-2}{z-1}\right)} = \frac{5z-2}{z-1} + \frac{5\bar{z}-2}{\bar{z}-1} = \frac{(5z-2)(\bar{z}-1) + (5\bar{z}-2)(z-1)}{(z-1)(\bar{z}-1)} \\ &= \frac{5z\bar{z} - 5z - 2\bar{z} + 2 + 5z\bar{z} - 5\bar{z} - 2z + 2}{(z-1)(\bar{z}-1)} = \frac{10z\bar{z} - 7(z + \bar{z}) + 4}{(z-1)(\bar{z}-1)} \end{aligned}$$

- 2) Z imaginaire pur $\Leftrightarrow Z + \bar{Z} = 0$. On a donc :

$$10z\bar{z} - 7(z + \bar{z}) + 4 = 0 \Leftrightarrow 10|z|^2 - 14\operatorname{Re}(z) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 10(x^2 + y^2) - 14x + 4 = 0 \stackrel{\div 10}{\Leftrightarrow} x^2 + y^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0$$

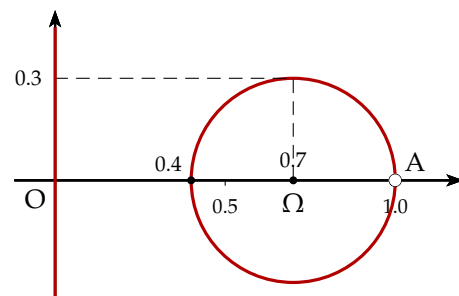
$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 - \frac{49}{100} + y^2 + \frac{2}{5} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 - \frac{9}{100} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{10}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 0,7)^2 + y^2 = 0,3^2$$

On obtient l'équation d'un cercle \mathcal{C} de centre $\Omega(0,7; 0)$ et de rayon $0,3$.

Le point $(1; 0)$ appartient au cercle, comme $z \neq 1$, ce point ne peut faire partie de l'ensemble des points M.



Remarque : Si $M(z)$ se trouve sur le cercle \mathcal{C} privé du point $(1; 0)$, le point $M'(Z)$ se trouve sur l'axe des ordonnées. Le cercle \mathcal{C} privé du point $(1; 0)$ se transforme ainsi en la droite des ordonnées par l'application f tel que $f(z) = Z$

3 Équation polynomiale à coefficients réels

3.1 Équation du second degré

Théorème 3 : Soit l'équation à coefficients réels ($a \neq 0$) : $az^2 + bz + c = 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Cette équation admet comme solution :

- Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles : $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, une solution réelle double : $z_0 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées avec $\Delta = i^2(-\Delta)$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

⚠ La notation \sqrt{z} n'a de sens que si z est un réel positif ou nul.

Exemple : Résoudre $z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$. Comme $\Delta < 0$ on a 2 solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i \quad \text{ou} \quad z_2 = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$$

Algorithme : Soit la fonction Python  `eq2(a,b,c)` permettant de calculer les racines de : $ax^2 + bx + c$

Un nombre complexe en Python  s'écrit : $a + 1j * b$ ou `complex(a,b)`.

L'expression `1j` remplace la lettre i

Cette fonction renvoie pour `eq2(1,-2,2)` : $(1 + 1j), (1 - 1j)$

```
from math import*
def eq2(a,b,c):
    D=b**2-4*a*c
    if D>=0:
        x=(-b+sqrt(D))/(2*a)
        y=(-b-sqrt(D))/(2*a)
    else:
        x=(-b+1j*sqrt(-D))/(2*a)
        y=(-b-1j*sqrt(-D))/(2*a)
    return x,y
```

3.2 Factorisation et racines d'un polynôme

On considère des polynômes P de degré n dans \mathbb{C} à coefficients réels :

$$P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0 \quad \text{avec} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, c_k \in \mathbb{R} \text{ et } c_n \neq 0$$

On note $\deg P = n$ et si $a \in \mathbb{C}$ est une racine de P , alors : $P(a) = 0$

Théorème 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$z^n - a^n = (z - a)Q(z) \quad \text{avec } Q \text{ polynôme de degré } (n - 1)$$

Démonstration : Par récurrence. Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, z^n - a^n = (z - a)Q(z), \quad \text{deg } Q = n - 1$$

Initialisation : $n = 1, z^1 - a = (z - 1) \times 1 \Rightarrow Q(z) = 1$ de degré 0.

La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $z^n - a^n = (z - a)Q(z)$, $\text{deg } Q = n - 1$, montrons que $z^{n+1} - a^{n+1} = (z - a)R(z)$, $\text{deg } R = n$

De HR, on a : $z^n = (z - a)Q(z) + a^n$ (1)

$$\begin{aligned} z^{n+1} - a^{n+1} &= z(z^n) - a^{n+1} \stackrel{(1)}{=} z[(z - a)Q(z) + a^n] - a^{n+1} = z(z - a)Q(z) + a^n z - a^{n+1} \\ &= z(z - a)Q(z) + a^n(z - a) = (z - a) \underbrace{[zQ(z) + a^n]}_{R(z)} \end{aligned}$$

$\text{deg } Q = n - 1 \Rightarrow \text{deg } zQ(z) = n \Rightarrow \text{deg } R = n$. La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}^*, z^n - a^n = (z - a)Q(z)$, $\text{deg } Q = n - 1$

Exemple : Factoriser $z^3 - 8 = z^3 - 2^3$

On peut factoriser par $(z - 2)$

Pour trouver la factorisation, on effectue une division euclidienne (ci-contre).

On soustrait à chaque étape le quotient trouvé.

On obtient : $z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4)$

$$\begin{array}{r|l} z^3 + 0z^2 + 0z - 8 & z - 2 \\ -z^3 + 2z^2 & \hline 0z^3 + 2z^2 + 0z & z^2 + 2z + 4 \\ -2z^2 + 4z & \\ 0z^2 + 4z - 8 & \\ -4z + 8 & \\ 0z + 0 & \end{array}$$

Théorème 5 : Soit P un polynôme de degré n et a une racine de P .

P se factorise par $(z - a)$ et donc $P(z) = (z - a)Q(z)$ avec $\text{deg } Q = n - 1$.

Démonstration : Avec le symbole Σ .

On pose $P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ et comme a est une racine de P , on a $P(a) = 0$.

En utilisant le théorème précédent :

$$\begin{aligned} P(z) &= P(z) - P(a) = \sum_{k=0}^n c_k z^k - \sum_{k=0}^n c_k a^k = \sum_{k=0}^n c_k (z^k - a^k) \stackrel{z^0 - a^0 = 0}{=} \sum_{k=1}^n c_k \underbrace{(z^k - a^k)}_{(z-a)Q_k(z)} \\ &= (z - a) \underbrace{\sum_{k=1}^n c_k Q_k(z)}_{Q(z)} = (z - a)Q(z) \end{aligned}$$

Or $\text{deg } Q_n = n - 1$ et $\forall k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, \text{deg } Q_k < n - 1$, donc $\text{deg } Q = n - 1$.

Exemple : Résoudre dans \mathbb{C} : $z^3 + z^2 + 2z - 4 = 0$

- On pose $P(z) = z^3 + z^2 + 2z - 4$.
 $z = 1$ est une racine évidente car $P(1) = 1 + 1 + 2 - 4 = 0$.
- D'après le théorème précédant $P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$
- On détermine les coefficients a, b, c par identification sur le polynôme P :

$$(z - 1)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c = az^3 + (b - a)z^2 + (c - a)z - c$$

De façon immédiate : $a = 1$ et $c = 4$ et sur le coef. de z^2 : $b - a = 1 \Rightarrow b = 2$

On a alors : $P(z) = (z - 1)(z^2 + 2z + 4)$

- $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z^2 + 2z + 4 = 0$
 $\Delta = 4 - 16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$ deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad z_2 = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$$

$$S = \{1; -1 + i\sqrt{3}; -1 - i\sqrt{3}\}$$

Théorème 6 : Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

Démonstration : Par récurrence. Soit P_n un polynôme non nul de degré n .

Initialisation : $n = 0$, P_0 est constant non nul donc n'admet pas de racine.

La propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P_n admet au plus n racines, montrons que P_{n+1} admet au plus $(n + 1)$ racines.

- Si P_{n+1} n'a pas de racine, alors P_{n+1} admet au plus $(n + 1)$ racines.
La proposition est héréditaire.
- Si P_{n+1} possède une racine a alors, d'après le th. précédant : $P_{n+1}(z) = (z - a)P_n$

Si P_{n+1} possède une autre racine $b \neq a$, alors d'après l'intégrité de \mathbb{C} :

$$P_{n+1}(b) = 0 \Rightarrow (b - a)P_n(b) = 0 \stackrel{b \neq a}{\Rightarrow} P_n(b) = 0 \Rightarrow b \text{ racine de } P_n$$

À part a toutes les autres racines de P_{n+1} sont des racines de P_n qui d'après HR possède au plus n racines, donc P_{n+1} possède au plus $(n + 1)$ racines.

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, un polynôme de degré n possède au plus n racines.

4 Formule du binôme

Théorème 7 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Démonstration : Par récurrence. Avec le symbole Σ

Soit la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Initialisation : $n = 0$, $(a + b)^0 = 1$ et $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)^n (a + b) \stackrel{\text{HR}}{=} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right] (a + b) \\ &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \end{aligned}$$

Dans la deuxième somme, on change $k \rightarrow k + 1$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right]}_{\text{relation de Pascal}} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k. \quad \text{La proposition est héréditaire.} \end{aligned}$$

Par initialisation et hérédité, $\forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Exemple : À l'aide de la formule du binôme et en s'aidant du triangle de Pascal, développer : $(1 + i)^5$ et $(2 - i)^4$

$$\begin{aligned}
 (1+i)^5 &= 1 + 5i + 10i^2 + 10i^3 + 5i^4 + i^5 \\
 &= 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i \\
 &= -4 - 4i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2-i)^4 &= 2^4 + 4(2^3)(-i) + 6(2^2)(-i)^2 + 4(2)(-i)^3 + (-i)^4 \\
 &= 16 - 32i - 24 + 8i + 1 \\
 &= -7 - 24i
 \end{aligned}$$

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Triangle de Pascal
jusqu'au degré 5