

Les nombres complexes

Le point de vue géométrique

Table des matières

1	Forme trigonométrique	2
1.1	Angle orienté et mesure principale	2
1.2	Forme trigonométrique	2
1.3	Relations de symétrie	3
1.4	Relations trigonométriques	3
1.5	Opérations sur les modules et arguments	4
2	Forme exponentielle	4
2.1	Introduction	4
2.2	Définition	5
2.3	Formule de Moivre et formules d'Euler	5
3	Ensemble des complexes de module 1	5
3.1	Propriété	5
3.2	Racines n -ième de l'unité	6
4	Complexes et vecteurs	7
4.1	Affixe d'un vecteur	7
4.2	Ensemble de points	7
4.3	Somme de deux vecteurs	7
4.4	Angle orienté	8
4.5	Alignement, parallélisme et orthogonalité	8

1 Forme trigonométrique

1.1 Angle orienté et mesure principale

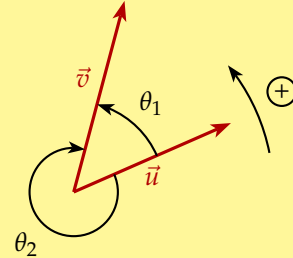
Définition 1 : Un angle orienté est défini par deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , noté (\vec{u}, \vec{v}) .

L'angle est alors orienté de \vec{u} vers \vec{v} .

On dit que les mesures (en radian) θ_1 et θ_2 d'un même angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) sont égales modulo 2π , s'il existe un entier relatif k tel que :

$$\theta_2 = \theta_1 + k \times 2\pi \quad \text{on note alors} \quad \theta_1 = \theta_2 [2\pi]$$

On appelle mesure principale d'un angle (\vec{u}, \vec{v}) , la mesure θ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$.



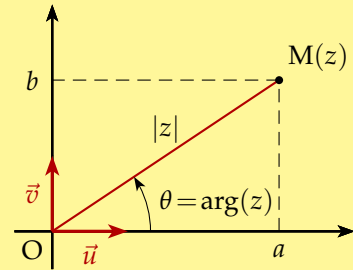
Remarque : On veillera à donner un angle orienté avec sa mesure principale :
par exemple $-\frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

1.2 Forme trigonométrique

Définition 2 : Soit $z = a + ib$ un complexe non nul.

La forme trigonométrique de z , est l'écriture de la forme : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

- $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ module de z
- $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z) [2\pi]$ argument de z



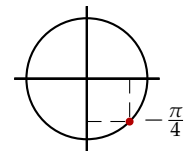
Remarque : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ est à relier aux coordonnées polaires de $M(r; \theta)$.

Exemples :

Trouver la forme trigonométrique de $z = 1 - i$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

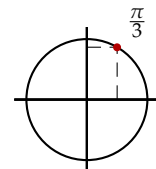
$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} [2\pi] :$$



$$z = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$$

Trouver la forme algébrique de $z = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

$$\text{On a } z = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} i$$



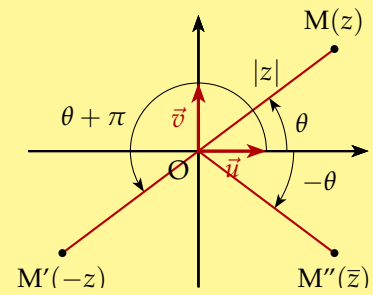
1.3 Relations de symétrie

Propriété 1 : Pour tout complexe z non nul, on a

les relations suivantes :

$$|-z| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad [2\pi]$$

$$|\bar{z}| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$$



1.4 Relations trigonométriques

Théorème 1 : Formules d'addition

Pour tous réels a et b , on a les relations

$$\textcircled{1} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \textcircled{3} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\textcircled{2} \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \textcircled{4} \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Démonstration : Formule $\textcircled{2}$. Soit les points A et B sur le cercle unité :

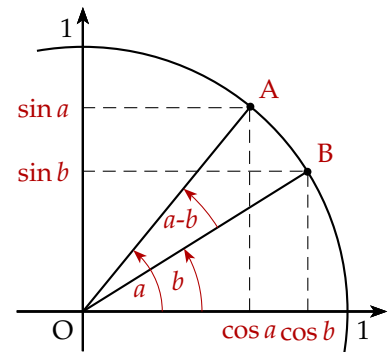
Calculons le produit scalaire $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ de deux façons :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos(a-b) = \cos(a-b)$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Des deux égalités, on déduit la formule $\textcircled{2}$:

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$



Pour trouver la formule $\textcircled{1}$, on remplace dans $\textcircled{2}$ b par $-b$, on a alors :

$$\cos(a+b) = \cos[a - (-b)] \stackrel{\textcircled{2}}{=} \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Pour trouver les formules $\textcircled{3}$ et $\textcircled{4}$ avec le sinus, on utilise les relations :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

Remarque : Pour se souvenir des formules d'addition, on peut remarquer :

- Avec le cosinus on « ne panache pas » tandis qu'avec le sinus on « panache ».
- Avec le cosinus de $a+b$, on met un « moins » entre les deux termes.

Théorème 2 : Formules de duplication

Pour tout réel a , on a les relations :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

Démonstration : On utilise les formules d'addition en faisant $b = a$.

1.5 Opérations sur les modules et arguments

Théorème 3 : Pour tous complexes z et z' non nuls, on a les relations suivantes :

$$|z z'| = |z| |z'| \quad \text{et} \quad \arg(z z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{et} \quad \arg(z^n) = n \arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

Démonstration : Soit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$:

$$\begin{aligned} z z' &= r r' (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= r r' (\cos \theta \cos \theta' + i \cos \theta \sin \theta' + i \sin \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') \\ &= r r' [\underbrace{\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'}_{\cos(\theta + \theta')} + i \underbrace{(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')}_{\sin(\theta + \theta')}] \\ &= r r' (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \end{aligned}$$

Par identification, on a : $|z z'| = r r' = |z| |z'|$ et $\arg(z z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$

• On démontre $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n \arg(z)$ par récurrence.

• Pour le quotient, on pose $Z = \frac{z}{z'}$, on a donc $z = Z z'$. Du produit :

$$|z| = |Z| |z'| \quad \Leftrightarrow \quad |Z| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\arg(z) = \arg(Z) + \arg(z') \quad [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \arg(Z) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

2 Forme exponentielle

2.1 Introduction

Soit la fonction f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{C} par : $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$.

$$\begin{aligned} f(\theta)f(\theta') &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= (\cos \theta \cos \theta' + i \cos \theta \sin \theta' + i \sin \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') \\ &= (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')) \\ &= [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')] = f(\theta + \theta') \end{aligned}$$

Donc $f(\theta + \theta') = f(\theta)f(\theta')$.

Les seules fonctions dérivables non nulles ($f(0) = 1$) sur \mathbb{R} qui transforment une somme en produit sont du type $f(x) = e^{kx}$.

En étendant la fonction exponentielle à \mathbb{C} , on pose $f(\theta) = e^{k\theta}$ avec $k \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$

Dérivons la fonction f pour déterminer k : $f'(\theta) = k e^{k\theta}$ et

$$f'(\theta) = -\sin \theta + i \cos \theta = i^2 \sin \theta + i \cos \theta = i(\cos \theta + i \sin \theta) = i f(\theta)$$

Par identification, on obtient alors $k = i$.

En étendant la fonction exponentielle à \mathbb{C} , on décide de poser $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

2.2 Définition

Définition 3 : La forme exponentielle d'un nombre complexe non nul est :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z) \in [2\pi]$$

Remarque : On peut maintenant admirer l'expression d'Euler : $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Cette expression contient tous les nombres qui ont marqué l'histoire des mathématiques : 0 et 1 pour l'arithmétique, π pour la géométrie, i pour les nombres complexes et e pour l'analyse.

Exemple : Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$, on a : $|z| = 2$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ donc $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

2.3 Formule de Moivre et formules d'Euler

Théorème 4 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

- Formule de Moivre : $\cos n\theta + i \sin n\theta = e^{in\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$
- Formules d'Euler : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Remarque : Bien remarquer que pour $\sin \theta$, on divise par $2i$.

Démonstration :

- La formule de Moivre est l'application directe de la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle : $e^{na} = (e^a)^n$
- Pour les formules d'Euler, on développe la forme exponentielle :

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta + \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)}{2} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta + \cos \theta - i \sin \theta}{2} = \cos \theta$$

$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta - \cos(-\theta) - i \sin(-\theta)}{2i} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta - \cos \theta + i \sin \theta}{2i} = \sin \theta$$

3 Ensemble des complexes de module 1

3.1 Propriété

Théorème 5 : Soit \mathbb{U} , l'ensemble des complexes de module 1.

- $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.
- L'ensemble \mathbb{U} est stable par rapport au produit et à l'inverse :

$$z, z' \in \mathbb{U} \Rightarrow zz' \in \mathbb{U} \text{ et } \frac{1}{z} \in \mathbb{U}$$

Démonstration : Propriété des modules pour le produit et l'inverse.

3.2 Racines n -ième de l'unité

Théorème 6 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Les racines n -ième de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n = 1$.
- \mathbb{U}_n est l'ensemble des n racines de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

- Leur somme est nulle : $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 1 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = 0$
- Leurs images M_k dans le plan complexe sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle unité.

Démonstration : On décompose z et 1 en module argument, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = 1 \\ \arg(z^n) = 0 \pmod{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = 1 \\ n \arg(z) = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

- Il y a n angles distincts correspondant aux valeurs de $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$
- Les solutions sont les puissances de $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ car $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^k = z_1^k$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} z_1^k = 1 + z_1 + \dots + z_1^{n-1} \stackrel{\text{suite géo}}{=} \frac{1 - z_1^n}{1 - z_1} = 0 \quad \text{car } z_1^n = z_0 = 1$$

- Soit les points $M_k(z_k)$, on a alors $(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \frac{2\pi}{n}$ avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

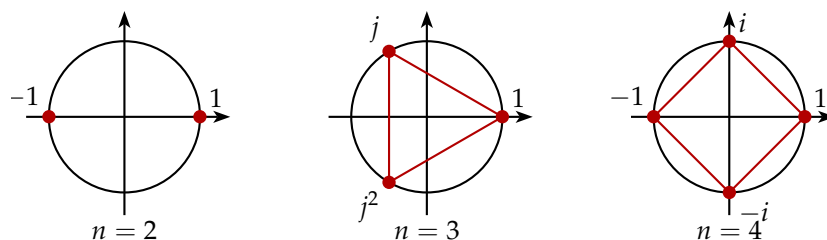
Les points M_k sont alors les sommets d'un polygone régulier de n côtés.

Exemples : $\mathbb{U}_2 = \{1, e^{i\pi}\} = \{1, -1\}$,

$\mathbb{U}_3 = \left\{ 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}} \right\}$, on pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ d'où $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$,

$\mathbb{U}_4 = \left\{ 1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{3\pi}{2}} \right\} = \{1, i, -1, -i\}$

On obtient les représentations suivantes :



4 Complexes et vecteurs

4.1 Affixe d'un vecteur

Théorème 7 : Pour tous points $A(z_A)$ et $B(z_B)$ du plan complexe, on note :

- $z_{\overrightarrow{AB}}$ l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} on a alors :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A, \quad AB = |z_B - z_A|, \quad (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

- I milieu de $[AB]$, on a alors : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

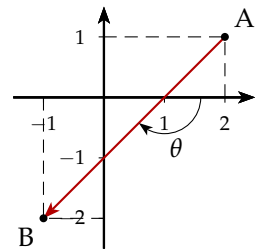
Remarque : Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$, on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

Exemple : On donne : $A(2 + i)$ et $B(-1 - 2i)$. Faire une figure puis déterminer l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} , la distance AB et l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$.

- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1 - 2i - 2 - i = -3 - 3i$ donc $\overrightarrow{AB}(-3 - 3i)$

- $AB = |z_B - z_A| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$. On pose $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta &= -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \theta = -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$$



4.2 Ensemble de points

Théorème 8 : Soit $r > 0$, l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant

- $|z - z_A| = r \Leftrightarrow AM = r$ est le cercle de centre A et de rayon r
- $|z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$ est la médiatrice du segment $[AB]$

4.3 Somme de deux vecteurs

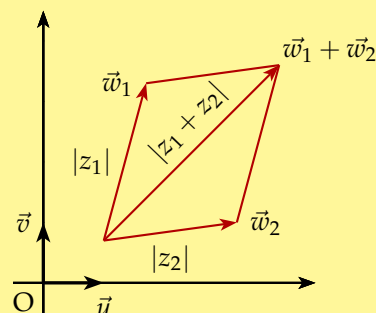
Théorème 9 : Soit $\vec{w}_1(z_1), \vec{w}_2(z_2)$

on a alors : $\vec{w}_1 + \vec{w}_2(z_1 + z_2)$

et l'inégalité triangulaire :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

La somme de deux complexes revient à additionner deux vecteurs dans le plan complexe et inversement.



4.4 Angle orienté

Théorème 10 : Pour tous points A, B, C et D tels que $(A \neq B)$ et $(C \neq D)$, on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right)$$

Démonstration : D'après les règles sur les angles orientés :

$$(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) \text{ et } (\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w})$$

on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) = (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \\ &= \arg(z_{\overrightarrow{CD}}) - \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) \\ &= \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) \end{aligned}$$

4.5 Alignement, parallélisme et orthogonalité

Propriété 2 : Soit A, B, C et D quatre points distincts deux à deux

$$\begin{aligned} A, B, C \text{ alignés} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \\ (AB) \text{ et } (CD) \text{ parallèles} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Démonstration : \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} colinéaires $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \text{ } [\pi]$

On en déduit que $\arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = 0 \text{ } [\pi]$

même chose avec les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} pour deux droite parallèles

Propriété 3 : Soit $A \neq B$ et $C \neq D$ quatre points

$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$$

Démonstration : \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} orthogonaux $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi]$

On en déduit que : $\arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) = \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi]$

Remarque :

Pour montrer que ABC est rectangle isocèle en A, on montre que : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$