Les nombres complexes
Le point de vue géométrique

Angle orienté et mesure principale

EXERCICE 1

Tracer un cercle trigonométrique puis placer les points des angles suivants :

- π
- $\dfrac{\pi}{4}$
- $\dfrac{3\pi}{2}$
- $\dfrac{\pi}{6}$
- $-\dfrac{\pi}{3}$
- $-\dfrac{3\pi}{4}$
- $\dfrac{5\pi}{6}$
- $-\dfrac{3\pi}{2}$

EXERCICE 2

Déterminer la mesure principale correspondant aux angles α suivants :

1) $\alpha = \dfrac{7\pi}{2}$ 2) $\alpha = -\dfrac{4\pi}{3}$ 3) $\alpha = \dfrac{35\pi}{6}$ 4) $\alpha = -\dfrac{21\pi}{4}$ 5) $\alpha = \dfrac{202\pi}{3}$

EXERCICE 3

Placer puis déterminer les valeurs du cosinus et sinus des angles suivants :

1) $\dfrac{\pi}{6}$ 2) $\dfrac{5\pi}{6}$ 3) $\dfrac{7\pi}{6}$ 4) $\dfrac{11\pi}{6}$ 5) $\dfrac{13\pi}{6}$

EXERCICE 4

Placer puis déterminer les valeurs du cosinus et sinus des angles suivants :

1) $\dfrac{\pi}{4}$ 2) $\dfrac{9\pi}{4}$ 3) $\dfrac{5\pi}{4}$ 4) $\dfrac{81\pi}{4}$ 5) $-\dfrac{108\pi}{4}$

EXERCICE 5

Placer puis déterminer les valeurs du cosinus et sinus des angles suivants :

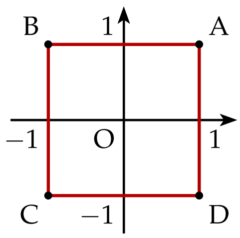
1) $\dfrac{4\pi}{3}$ 2) $\dfrac{\pi}{3}$ 3) $\dfrac{71\pi}{3}$ 4) $\dfrac{97\pi}{3}$ 5) $-\dfrac{54\pi}{3}$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

EXERCICE 6

Dans le repère orthonormal direct,on a représenté le carré ABCD ci-contre.

Donner l'affixe et un argument de chacun des sommets du carré ABCD



EXERCICE 7

Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$
2) $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
3) $z_3 = 4 - 4i$
4) $z_4 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{i\sqrt{3}}{4}$
5) $z_5 = -2i$
6) $z_6 = \dfrac{4}{1-i}$

EXERCICE 8

À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée en degré à 10^{-2} près d'un argument de chacun des nombres complexes suivants :

1) $z = 4 - 3i$
2) $z = 1 + 2i$
3) $z = -2 + i$

EXERCICE 9

Trouver une forme trigonométrique, en utilisant les opérations sur les modules et arguments de chacun des nombres complexes suivants :

1) $z = (1-i)^6$
2) $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}$
3) $z = \dfrac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$

EXERCICE 10

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

1) Donner le module et un argument de z_1, z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$
2) Donner la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$
3) En déduire que : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Forme exponentielle

EXERCICE 11

Donner une forme exponentielle de chacun des complexes suivants :

1) $z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$
2) $z_2 = (1 + i\sqrt{3})^4$
3) $z_3 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{5} - i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$

EXERCICE 12

Dans chacun des cas suivants, écrire z sous la forme exponentielle et en déduire la forme algébrique de $\overline{z}$ et $\dfrac{1}{z}$.

1) $z_1 = \dfrac{6}{1+i}$
2) $z_2 = 3i\,e^{i\frac{\pi}{3}}$
3) $z_3 = -12e^{i\frac{\pi}{4}}$

EXERCICE 13

1) a) Exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$ à l'aide de la formule de Moivre et du développement de $(a+b)^3$.

b) En déduire que : $\cos^3 x = \dfrac{3\cos x + \cos 3x}{4}$ et $\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$.

2) Retrouver ces deux formules à l'aide des formules d'Euler.

Ensemble de points

EXERCICE 14

Déterminer et construire les ensembles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 des points dont l'affixe z vérifie la condition proposée.

1) $z = 3\,e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [0;2\pi[$

2) $z = r\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec $r \in [0;+\infty[$

3) $z = k\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

EXERCICE 15

A et B ont pour affixes respectives 1 et $3+2i$.
Déterminer puis construire les ensembles Γ_1 et Γ_2, ensemble des points M dont l'affixe z satisfait les conditions suivantes :

1) $|z-1| = |z-(3+2i)|$

2) $|z-(3+2i)| = 1$

Triangle

EXERCICE 16

Soit les points A(a), B(b) et C(c) tels que : $a = 1 + \dfrac{3}{4}i$, $b = 2 - \dfrac{5}{4}i$, $c = 3 + \dfrac{7}{4}i$.

1) Placer les points A, B et C.
2) Quelle est la nature du triangle ABC ?
3) Calculer l'affixe de A' tel que ABA'C soit un carré.

EXERCICE 17

Soit le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct$(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit les points A(a), B(b) et C(c) tels que : $a = -2+2i$, $b = -3-6i$ et $c = 1$.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

Applications dans $\mathbb{C}$

EXERCICE 18

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit f l'application définie dans $\mathbb{C} - \{-2i\}$ par : $f(z) = \dfrac{z-2+i}{z+2i}$.

1) On pose $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de x et de y puis montrer que :

$$\mathrm{Re}[f(z)] = \frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}[f(z)] = \frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$$

⚠ Soyez patient et méthodique !

2) En déduire la nature de :
   a) l'ensemble E des points M d'affixe z du plan, tels que $f(z)$ soit un réel ;
   b) l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur ou éventuellement nul.
   c) Représenter ces deux ensembles.

EXERCICE 19

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit le point A d'affixe $1+i$.
À tout point $M(z)$ avec $z \neq 0$, on associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \dfrac{z-1-i}{z}$
Le point M' est appelé le point image du point M.

1) a) Déterminer, l'affixe du point B', image du point $B(i)$.
   b) Montrer que, pour tout point $M(z)$ avec $z \neq 0$, l'affixe z' du point M' est telle que $z' \neq 1$.
2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ avec $z \neq 0$ tel que l'affixe du point M' est telle que $|z'| = 1$.
3) Quel est l'ensemble des points $M(z)$ avec $z \neq 0$ tel que l'affixe du point M' est un nombre réel ?

EXERCICE 20

Soit le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
L'unité graphique est 1 cm.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2-3i$, $z_B = i$ et $z_C = 6-i$.

Partie A

1) Calculer $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.
2) En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère l'application f qui, au point $M(z)$ avec $z \neq i$, associe le point $M'(z')$ telle que :
$$z' = \frac{i(z-2+3i)}{z-i}$$

1) Soit $D(1-i)$. Déterminer l'affixe du point D' image du point D par f.
2) a) Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par f est le point d'affixe $2i$.
   b) Démontrer que E est un point de la droite (AB).
3) Démontrer que, pour tout point M distinct de B, $OM' = \dfrac{AM}{BM}$.
4) Démontrer que, pour tout point M distinct de A et du point B, on a l'égalité :
$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

5) Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M′ appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
6) Démontrer que si le point M′ appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

EXERCICE 21

Soit le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
L'unité graphique est 2 cm.
On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

Soit les points $A(1)$ et $B(-1)$.
Soit l'application f qui, à tout point $M(z)$ distinct de B, associe le point $M'(z')$ telle que :

$$z' = \frac{z-1}{z+1}$$

1) Déterminer les points invariants M de f, tels que M = f(M).
2) a) Montrer que pour $z \neq -1$: $(z'-1)(z+1) = -2$.
   b) En déduire pour $z \neq -1$ une relation entre :
   $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$.
   Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
3) Montrer que si M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon 2, alors M′ appartient au cercle $\mathscr{C}'$ de centre A et de rayon 1.
4) Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.
   a) Déterminer la forme exponentielle de $(p+1)$.
   b) Montrer que le point P appartient au cercle $\mathscr{C}$.
   c) Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.
   Montrer que les points A, P′ et Q sont alignés dans cet ordre.
   d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction à la règle et au compas de l'image P′ du point P par l'application f.

Vrai-Faux

EXERCICE 22

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Soit $A(2-5i)$ et $B(7-3i)$.
   Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.
2) Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|z-i| = |z+2i|$.
   Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.
3) Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.
4) Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 4 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|i+z| = 1 + |z|$.

5) Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 5 : Si $z \in \mathbb{U}$ alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2} \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 23

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

1) **Proposition 1** : Pour tout entier naturel n : $(1+i)^{4n} = (-4)^n$.

2) Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0$ où $z \in \mathbb{C}$.
Proposition 2 : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

3) **Proposition 3** : Pour tout nombre réel α, $1 + e^{2i\alpha} = 2e^{i\alpha}\cos(\alpha)$.

4) Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{2}(1+i)$ et M_n le point d'affixe $(z_{\mathrm{A}})^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Proposition 4 : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.

5) Soit $j \in \mathbb{U}$, d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
Proposition 5 : On a légalité : $1 + j + j^2 = 0$.

Complexes et suite

EXERCICE 24

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$

1) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

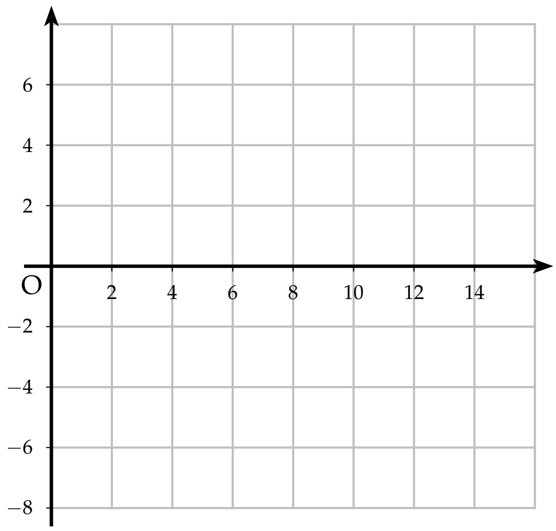
2) Soit la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i\,(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.
   a) Vérifier que z_1 est une solution de (E).
   b) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
   c) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée ci-dessous et tracer, les segments $[\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2]$, $[\mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3]$ et $[\mathrm{M}_3, \mathrm{M}_4]$.

3) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $z_n = 2^n \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n i}{2}\right)$.

4) Calculer les longueurs $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ et $\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$.

On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5) On note $\ell_n = \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_2\mathrm{M}_3 + \cdots + \mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}$.
   a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ell_n = 2\sqrt{3}\,(2^n - 1)$.
   b) Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell_n \geqslant 1\,000$.



EXERCICE 25

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n$.

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1) Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$.

2) a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

c) Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3) Soit la fonction f en Python suivante :

a) Quelle est la valeur retournée pour $f(0.5)$?

b) La valeur retournée pour $f(0.01)$ est 33. Quel est le rôle de cette fonction f ?

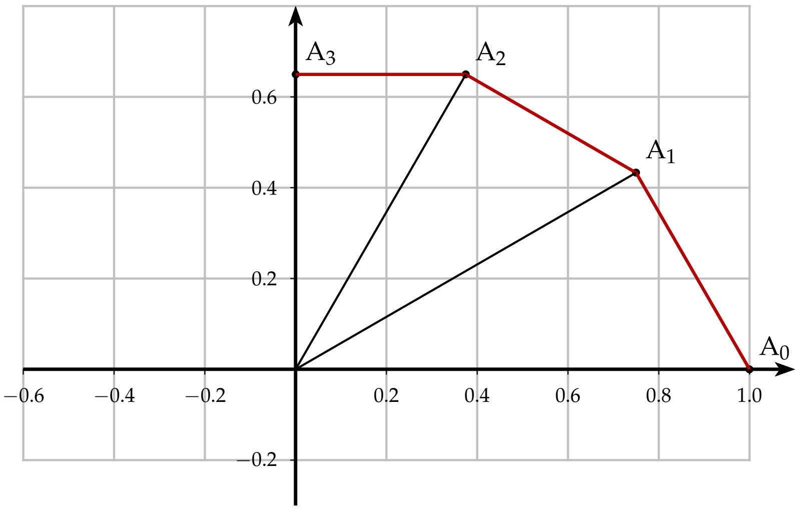
```
from math import*
def f(p):
    n=0
    r=1
    while r>p:
        n=n+1
        r=sqrt(3)/2*r
    return n
```

4) a) Démontrer que le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.

b) On admet que $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est sur l'axe des ordonnées.

c) Compléter la figure suivante, en représentant les points de A_4 à A_9. Les traits de construction seront apparents.



EXERCICE 26

Soit la suite (z_n) définie dans $\mathbb{C}$ par : $z_0 = \sqrt{3} - i$ et $z_{n+1} = (1+i)z_n$.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1) Calculer u_0.
2) Démontrer que (u_n) est la suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B

1) Déterminer la forme algébrique de z_1.
2) Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1+i$.
   En déduire la forme exponentielle de z_1.
3) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

EXERCICE 27

On définit la suite (z_n) sur $\mathbb{C}$ par : $\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On note r_n le module du terme z_n : $r_n = |z_n|$.

Dans le plan complexe d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1) a) Calculer z_1, z_2 et z_3.
   b) Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique.
   c) Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.
   d) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.

2) a) Démontrer que la suite (r_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) La suite (r_n) est-elle convergente ? Interpréter géométriquement ce résultat.

3) On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.

Ainsi $L_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.

b) Donner une expression de L_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).