Nombres premiers

Définition et critère d'arrêt

EXERCICE 1

Sans calculatrice, à l'aide de divisions successives et du critère d'arrêt, déterminer si les entiers suivants sont premiers ou non.

$$97\ ;\ 109\ ;\ 117\ ;\ 271\ ;\ 317\ ;\ 323\ ;\ 401\ ;\ 419\ ;\ 437\ ;\ 527\ ;\ 719$$

EXERCICE 2

Dans les *Inédits* de Marcel Pagnol, l'écrivain indique que, pour tout n entier impair $n > 1$, le nombre $N = n + (n+2) + n(n+2)$ est premier.
Qu'en pensez-vous ?

EXERCICE 3

Vrai-Faux

1) **Proposition 1 :** Il existe une valeur de $n \in \mathbb{N}$ tel que $2n^2 + n - 10$ est premier.
2) **Proposition 2 :** Il existe une valeur de $n \in \mathbb{N}$ tel que $2n^2 + 7n + 6$ est premier.
3) **Proposition 3 :** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $n > 5$, $n^2 - 3n - 10$ n'est jamais premier.

On cherchera à factoriser les quantités.

EXERCICE 4

Soit p un nombre premier et deux entiers n_1 et n_2 tels que :

$$n_1 = p + 1\,000 \quad \text{et} \quad n_2 = p + 2\,000.$$

1) En raisonnant modulo 3, montrer que la seule valeur possible de p pour que n_1 et n_2 soient des nombres premiers est 3.
2) Peut-on avoir n_1 et n_2 premiers ?

Théorème de Gauss et nombres premiers

EXERCICE 5

p est premier et $p \geqslant 5$.

1) Démontrer que $(p^2 - 1)$ est divisible par 3 et par 8.
2) En déduire que $(p^2 - 1)$ est divisible par 24

EXERCICE 6

p est premier et $p \geqslant 7$.

1) Démontrer que $(p^4 - 1)$ est divisible par 3 et par 5.
2) Démontrer que $(p^4 - 1)$ est divisible par 16.
3) En déduire que $(p^4 - 1)$ est divisible par 240

EXERCICE 7

$p > 3$ est un nombre premier

1) Quels sont les restes possibles dans la division de p par 12 ?
2) Prouver que $p^2 + 11$ est divisible par 12.

EXERCICE 8

Soit $n \geqslant 1$.
Démontrer que $(30n + 7)$ n'est pas la somme de deux nombres premiers.

EXERCICE 9

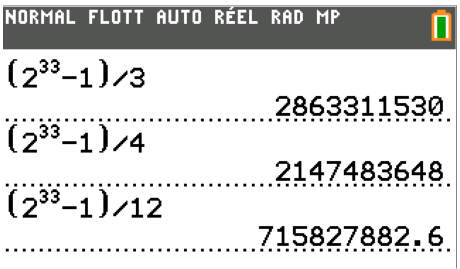
Soit p un nombre premier et $a, b \in \mathbb{N}$.
Montrer que si p divise a et $a^2 + b^2$ alors p divise b.

EXERCICE 10

Nombres de Mersenne

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où $n \in \mathbb{N}^*$ sont appelés nombres de Mersenne.
On s'intéresse au nombre de Mersenne : $2^{33} - 1$.

1) Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats suivants :



Il affirme alors que 3 et 4 divise $2^{33} - 1$ mais pas 12.

a) En quoi cette affirmation contredit le corollaire du théorème de Gauss.
b) Montrer que 4 ne divise pas $2^{33} - 1$.
c) En remarquant que $2 \equiv -1\ (3)$, montrer que 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.

2) a) Calculer la somme : $S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + \cdots + (2^3)^{10}$.
b) En déduire que 7 divise $2^{33} - 1$.

Décomposition

EXERCICE 11

1) Décomposer en produit de facteurs premiers : 6 468 et 16 380.
2) En déduire pgcd(6 468 , 16 380).

EXERCICE 12

1) Déterminer pgcd(8 316 , 5 670) à l'aide :
a) d'une décomposition en facteurs premiers.

b) de l'algorithme d'Euclide.

2) Quelle est la méthode la plus « économe » en opérations ?

EXERCICE 13

À l'aide de décompositions en facteurs premiers, déterminer $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$\frac{a}{b} = \frac{5\,292}{5\,544} \quad \text{et} \quad a + b = 903$$

EXERCICE 14

1) a) Quelle est la condition sur les puissances des facteurs premiers d'un carré ?

   b) Trouver un nombre de trois chiffres qui soit un carré parfait divisible par 56.

2) Trouver les diviseurs de 84, puis résoudre dans $\mathbb{N}$: $x(x+1)(2x+1) = 84$

EXERCICE 15

1) Expliquer comment procède cette fonction facteur(n) en Python pour déterminer la décomposition en facteurs premiers de n.

2) Expliquer l'avant dernière ligne : L.append(n)

```python
def facteur(n):
    d=2 ; c=1
    L=[]
    while d<=sqrt(n):
        if n%d==0:
            L.append(d)
            n=int(n/d)
        else:
            d=d+c ; c=2
    L.append(n)
    return L
```

EXERCICE 16

Cet exercice a pour but de déterminer par combien de zéros se termine 1 000 !.
On rappelle que : $1\,000\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 1\,000$.

1) Montrer qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ et un entier N premier avec 10 tels que :

$$1\,000\,! = 2^p \times 5^q \times N$$

2) a) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1 000 divisible par 5 ? divisible par 5^2 ? divisible par 5^3 ? divisible par 5^4 ?

   b) En déduire alors que $q = 249$.

3) Montrer que $p > q$ et que q est le nombre cherché.

Nombre de diviseurs

EXERCICE 17

1) À l'aide d'une décomposition en facteurs premiers, déterminer le nombre de diviseurs de : 2 025 et 1 575.

2) En déduire la liste des diviseurs de 2 025 et 1 575.

EXERCICE 18

1) Décomposer 300^{300} en produit de facteurs premiers.
   Quel est le nombre de diviseurs de 300^{300} ?
2) À partir du résultat de la question 1), trouver un nombre possédant plus d'un milliard de diviseurs.

EXERCICE 19

Démontrer qu'un entier naturel n est un carré parfait si, et seulement si, le nombre de ses diviseurs est impair.

EXERCICE 20

α et β sont deux naturels et $n = 2^{\alpha}\,3^{\beta}$.
Le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n.

1) Prouver que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$
2) En déduire n

EXERCICE 21

α et β sont deux naturels et $n = 2^{\alpha}\,3^{\beta}$.
Le nombre de diviseurs de $18n$ est le double du nombre de diviseurs de n.

1) Montrer que : $18n = 2^{\alpha+1}\,3^{\beta+2}$
2) Prouver que $\alpha(\beta - 1) = 4$
3) En déduire les valeurs de n possibles.

EXERCICE 22

L'entier parmi les nombres inférieurs ou égaux à 50 qui possède le plus de diviseurs en possède 10. Trouver cet entier.

EXERCICE 23

Parmi les nombres inférieurs ou égaux à 100, cinq possèdent 12 diviseurs.

1) Montrer qu'il existe 4 configurations pour un entier de posséder 12 diviseurs.
2) Trouver ces cinq entiers inférieurs à 100 parmi ces configurations.

EXERCICE 24

On cherche le plus petit entier naturel n possédant 8 diviseurs.

1) Montrer qu'il existe 3 configurations pour un entier de posséder 8 diviseurs.
2) Tester ces 3 configurations et en déduire la solution du problème.

EXERCICE 25

Parmi les nombres inférieurs ou égaux à 200, un seul possède 18 diviseurs.

1) Montrer qu'il existe 4 configurations pour un entier de posséder 18 diviseurs.
2) Trouver cet entier inférieur à 200 parmi ces configurations.

EXERCICE 26

Le produit de deux entiers naturels a et b ($a < b$) est 11 340. On note d leur pgcd.

1) a) Pourquoi d^2 divise-t-il 11 340 ?
   b) Pourquoi $d = 2^\alpha \times 3^\beta$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $0 \leqslant \beta \leqslant 2$?
2) On sait de plus que a et b ont six diviseurs communs et a est un multiple de 5.
   a) Démontrer que $d = 18$.
   b) En déduire a et b.

EXERCICE 27

Un entier n a 5 diviseurs et $n - 16$ est le produit de deux nombres premiers.

1) Prouver que $n = p^4$, avec p premier.
2) Écrire $n - 16$ sous forme d'un produit de trois facteurs dépendant de p.
3) En déduire la valeur de n

EXERCICE 28

Déterminer deux entiers naturels a et b tels que $a > b$, $\text{pgcd}(a, b) = 18$, et qui ont respectivement 21 et 10 diviseurs.

EXERCICE 29

Un entier naturel n est tel que :

- 4 divise n,
- n admet 14 diviseurs,
- n est de la forme $n = 37p + 1$ avec p premier.

1) Montrer que n possède au plus deux diviseurs premiers.
2) Montrer que n ne peut avoir qu'un seul diviseur premier.
3) Montrer qu'il existe un entier n inférieur à 1 000.

EXERCICE 30

Théorème d'Euclide

Un nombre parfait est un nombre dont la somme des diviseurs stricts est égal à lui-même. Euclide donne la règle suivante pour trouver des nombres parfaits :
« Si a s'écrit $2^n(2^{n+1} - 1)$ est si $2^{n+1} - 1$ est premier, alors a est parfait ».

1) Trouver les quatre premiers nombres parfaits.
2) On pose $a = 2^n(2^{n+1} - 1)$ avec $2^{n+1} - 1$ premier.
   a) Quelle est la décomposition de a en facteurs premiers ?
   b) En déduire la liste des diviseurs de a.
   c) Démontrer alors que la somme des diviseurs stricts est égale à ce nombre a.

Remarque : Le problème de savoir s'il existe des nombres parfaits impairs n'est toujours pas résolu.

Petit théorème de Fermat

Exercice 31

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{6n} - 1$ est divisible par 7.
2) Soit p un nombre premier différent de 3.
   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+p} - 3^{n+1}$ est divisible par p.

Exercice 32

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a = n^5 - n$.

1) Montrer que a est divisible par 5.
2) Montrer que $a = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$ puis que a est divisible par 2 et 3.
   Pourquoi a est-il divisible par 30 ?

Exercice 33

1) Montrer que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
2) Montrer que pour tout n, $4^n - 1$ est divisible par 3.
3) Montrer que pour tout k, $4^{4k} - 1$ est divisible par 5 et par 17.
4) En déduire quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Exercice 34

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $a = n^{13} - n$.

1) Montrer que a est divisible par 13 et 7.
2) En déduire que a est divisible par 182.

Exercice 35

1) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}$: $a^{31} - a \equiv 0 \; (62)$.
2) Montrer que, pour tout $a, n \in \mathbb{N}$: $a^{30+n} - a^n \equiv 0 \; (62)$.

Exercice 36

1) Soit p un nombre premier supérieur à 2.
   Montrer que p divise $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{p-2}$.
2) Est-ce que 97 divise la somme S telle que $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{98} n^{96}$?

Exercice 37

Soit p un nombre premier.

1) Montrer que si p divise $3^p + 1$ alors p divise 4.
2) Trouver p tel que p divise $3^p + 1$.

Exercice 38

1) Vérifier que 761 est un nombre premier.
2) L'entier n est un naturel composé de 760 chiffres tous égaux a 9 : $n = \underbrace{999\ldots99}_{760 \text{ fois}}$.
   a) Calculer $n+1$.
   b) Montrer que n est divisible par 761.

EXERCICE 39

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A = n^7 - n$.
   a) Montrer que A est divisible par 7.
   b) Vérifier que $A = n(n^3-1)(n^3+1)$ puis montrer que A est divisible par 2 et par 3.
   c) En déduire que A est divisible par 42.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $B = n^2(n^2-1)(n^2+1)$.
   a) Montrer que B est divisible par 3.
   b) De $(n^2-1)(n^2+1) = n^4 - 1$, montrer que B est divisible par 5.
   c) En utilisant un tableau de congruence, montrer que B est divisible par 4.
   d) En déduire que B est divisible par 60.

Modulo p premier

EXERCICE 40

Soit p un nombre premier et a, b, n des entiers relatifs.

1) Montrer que si $na \equiv nb \ (p)$ avec $n \not\equiv 0 \ (p)$ alors : $a \equiv b \ (p)$.
2) Montrer que si a est premier avec p et n un multiple de $p-1$ alors : $a^n \equiv 1 \ (p)$.
3) Montrer que si a est premier avec p alors il existe b tel que : $ab \equiv 1 \ (p)$.
   En déduire que tout entier non nul $a < p$ possède un inverse inférieur à p modulo p.

EXERCICE 41

Soit a un entier naturel pair non nul. Soit p un nombre premier divisant a^2+1.

1) Montrer que p est de la forme $4n+1$ ou $4n+3$.
2) On suppose que p est de la forme $4n+3$.
   a) Montrer que p ne divise pas a.
   b) Montrer que $(a^4)^n \times a^2 \equiv 1 \ (p)$.
   c) En déduire une contradiction.
3) Conclure.

EXERCICE 42

Soit N un entier supérieur ou égal à 2 et a un entier naturel pair non nul.
On pose $a = N\,!$

1) Montrer qu'il existe un nombre premier p divisant (a^2+1).
2) En utilisant le résultat de l'exercice précédent :

a) Montrer que $p > N$.

b) Justifier qu'il existe une infinité de nombres premiers p de la forme $(4n+1)$.

EXERCICE 43

Soit le système (S) suivant : $(S) \; : \; \begin{cases} 3x + 4y \equiv \; 5 \; (13) \\ 2x + 5y \equiv 7 \; (13) \end{cases}$ avec $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

1) Justifier que (S) est équivalent à : $\begin{cases} 3x + 4y \equiv 5 \; (13) \\ 7y \equiv 11 \; (13) \end{cases}$

2) Déterminer $k_1, k_2 \in [\![0, 12]\!]$ tels que : $7k_1 \equiv 1 \; (13)$ et $3k_2 \equiv 1 \; (13)$.

3) En déduire les solutions du système (S).

EXERCICE 44

Soit $q > 5$, un nombre premier et M le produit des nombres premiers de 5 à q :

$$M = 5 \times 7 \times 11 \times \cdots \times q$$

On pose : $N = 2^2 \times M + 3$.

1) a) Montrer que N est impair.

b) Montrer que $N \not\equiv 0 \; (3)$.

2) Soit p un nombre premier divisant N.

a) Montrer que $p > q$.

b) Montrer que : $p \equiv 1 \; (4)$ ou $p \equiv 3 \; (4)$.

3) Soit $N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$ la décomposition de N en facteurs premiers.

a) Montrer par l'absurde qu'il existe un facteur premier p_i avec $i \in [\![1, r]\!]$ tel que : $p_i \equiv 3 \; (4)$.

b) Déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $(4n+3)$.

EXERCICE 45

Soit $A = [\![1 \, , \, 46]\!]$.

1) On considère l'équation : (E) : $23x + 47y = 1$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Donner une solution particulière (x_0, y_0) de (E).

b) Déterminer l'ensemble des couples (x, y) solutions de (E).

c) En déduire qu'il existe un unique x appartenant à A tel que $23x \equiv 1 \; (47)$.

2) Soit a et b deux entiers relatifs.

a) Montrer que si $ab \equiv \; 0 \; (47)$ alors $a \equiv 0 \; (47)$ ou $b \equiv 0 \; (47)$.

b) En déduire que si $a^2 \equiv 1 \; (47)$ alors $a \equiv 1 \; (47)$ ou $a \equiv -1 \; (47)$.

3) a) Montrer que pour tout p de A, il existe un entier relatif q tel que $pq \equiv 1 \; (47)$.
Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté p^{-1} appartenant à A tel que $p \times p^{-1} \equiv 1 \; (47)$.

b) Quels sont les entiers p de A qui vérifient $p = p^{-1}$?

c) Montrer que $46\,! \equiv 1 \; (47)$.

Triplets pythagoriciens

EXERCICE 46

Soit p un nombre premier. On se propose d'étudier l'existence de couples (x, y) d'entiers naturels non nuls vérifiant l'équation : (E) $\quad x^2 + y^2 = p^2$.

1) On pose $p = 2$. Montrer que l'équation (E) est sans solution.

2) On suppose que $p \neq 2$ et que $(x; y)$ est solution de l'équation (E).
   a) Montrer que x et y sont de parités différentes.
   b) Montrer que x et y ne sont pas divisible par p.
   c) En déduire que x et y sont premiers entre eux.

3) On suppose que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est à dire que :
   $p = u^2 + v^2$ où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.
   a) Vérifier que le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right| \ , \ 2uv\right)$ est solution de (E).
   b) Donner une solution de (E) lorsque que $p = 5$ puis lorsque $p = 13$.

4) On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation (E) est impossible lorsque p n'est pas la somme de deux carrés.
   a) $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils la somme de deux carrés ?
   b) Démontrer que $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solutions.

EXERCICE 47

Un TP, triplet pythagoricien, est un triplet $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $x^2 + y^2 = z^2$. Ainsi (3, 4, 5) est un TP car $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Partie A : généralités

1) Démontrer que, si (x, y, z) est un TP, et p un entier naturel non nul, alors le triplet $(px, \ py, \ pz)$ est lui aussi un TP.

2) Démontrer que, si (x, y, z) est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.

3) On admet que tout $n \in \mathbb{N}^*$ peut s'écrire sous la forme d'un produit unique d'une puissance de 2 par un entier impair : $n = 2^\alpha \times k$ où $\alpha, k \in \mathbb{N}$ et k impair.
   Par exemple : $9 = 2^0 \times 9$, et $120 = 2^3 \times 15$.
   a) Donner la décomposition de l'entier 192.
   b) Soit x et z deux entiers naturels non nuls, tels que $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$. Écrire en puissances de 2 les entiers $2x^2$ et z^2.
   c) En examinant l'exposant de 2 dans la décomposition de $2x^2$ et z^2 , montrer qu'il n'existe pas de couple $(x, \ z)$ tels que $2x^2 = z^2$.
   d) En déduire qu'un TP est formé de trois naturels x, y, z deux à deux distincts.

Partie B : recherche d'un TP contenant 2015

Tout TP (x, y, z) est rangé dans l'ordre suivant : $x < y < z$.

1) Décomposer 2 015 en produit de facteurs premiers puis, en utilisant le TP(3,4,5), déterminer un TP de la forme $(x, \ y, \ 2\,015)$.

2) On admet que, pour tout entier naturel n , $(2n+1)^2 + \left(2n^2 + 2n\right)^2 = \left(2n^2 + 2n + 1\right)^2$.
   Déterminer un TP de la forme $(2\,015, \ y, \ z)$.

3) a) En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple $(x, \ z)$ tels que : $z^2 - x^2 = 403^2$, avec $x < 403$.
   b) En déduire un TP de la forme $(x, \ 2\,015, \ z)$.

Nombres premiers et suites

EXERCICE 48

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

1) Calculer les six premiers termes de la suite.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est pair.
3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ pair, u_n est divisible par 4.
   On note E l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n).
4) Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble E ?
5) Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.
   a) Montrer que : $6 \times 2^{p-2} \equiv 3\ (p)$ et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2\ (p)$.
   b) En déduire que $6u_{p-2} \equiv 0\ (p)$.
6) Le nombre p appartient-il à l'ensemble (E) ?

EXERCICE 49

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 10u_n + 21 \end{cases}$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $3u_n = 10^{n+1} - 7$.
   b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'écriture décimale de u_n.
3) Montrer que u_2 est un nombre premier.
4) On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.
   Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.
5) a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $3u_n \equiv 4 - (-1)^n\ (11)$.
   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n n'est pas divisible par 11.
6) a) Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1\ (17)$.
   b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, u_{16k+8} est divisible par 17.

EXERCICE 50

1) Calculer :
   a) $(1+\sqrt{6})^2$ b) $(1+\sqrt{6})^4$ c) $(1+\sqrt{6})^6$.
   d) Décomposer en produit de facteurs premiers 847 et 342.
   Que peut-on en déduire ?
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note a_n et b_n les entiers tels que : $(1+\sqrt{6})^n = a_n + b_n\sqrt{6}$.
   a) Que valent a_1 et b_1 ? D'après 1 a) donner d'autres valeurs de a_n et b_n.
   b) Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   c) Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas $a_{n+1} + b_{n+1}$.
   En déduire que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.
   d) Démontrer que, si a_n est premier avec b_n, alors a_{n+1} est premier avec b_{n+1}.
   En déduire que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, a_n est premier avec b_n.

Nombres premiers et produit de nombres premiers

EXERCICE 51

Soit n un entier relatif et A le nombre défini par : $A = n^4 - 12n^2 + 16$.

1) En remarquant que $A = n^4 - 8n^2 + 16 - 4n^2$, factoriser A.
2) Montrer que si n est pair alors, $|A|$ n'est pas premier.
3) On suppose que n est impair. On pose alors $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   a) Montrer que : $A = (4k^2 + 8k - 1)(4k^2 - 5)$.
   b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $|A|$ est nombre premier.

EXERCICE 52

On suppose que 250 507 n'est pas premier.
On se propose de chercher des couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant la relation :

$$\text{(E)} \ : \ a^2 - 250\,507 = b^2$$

1) Soit n un entier naturel.
   a) À l'aide d'un tableau de congruence donner les restes de n^2 modulo 9.
   b) Sachant que (E) est vérifiée, déterminer les restes modulo 9 de $a^2 - 250\,507$.
   c) Montrer que les restes modulo 9 de a sont 1 ou 8.
2) Vérifier que si le couple (a, b) vérifie (E), alors $a > 501$.
3) On suppose que le couple (a, b) vérifie (E).
   a) Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
   b) Déterminer le plus petit entier naturel k tel que $(505 + 9k\ ,\ b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.
4) a) Déduire de 3) une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.
   b) Cette écriture est-elle unique ?

EXERCICE 53

On recherche des nombres N dont la décomposition est $N = p_1 \times p_2 \times p_3$
où p_1, p_2, p_3 sont trois nombres premiers tels que $p_1 + p_2 = p_3$.
Par exemple : $286 = 2 \times 11 \times 13$ est un tel nombre.

1) Montrer que nécessairement $p_1 = 2$.
2) On suppose que $680 < N < 1\,920$. Déterminer p_2 puis déduire N.
3) On suppose que $6 \times 10^4 < N < 8 \times 10^4$.
   Donner les valeurs pour p_2 et en déduire les valeurs de N correspondantes.

Les nombres premiers de 100 à 200 sont : 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199

Nombres premiers et équations

EXERCICE 54

1) On suppose que $a, b \in \mathbb{N}$ et que $(a^2 - b^2)$ est un nombre premier.
Quelle relation existe-t-il entre a et b ?
2) Montrer que 401 est premiers puis résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $x^2 - y^2 = 401$.

EXERCICE 55

Le but de cet exercice est de trouver $x \in \mathbb{Z}$, solutions de : (E) : $x^2 + x - 2 \equiv 0\ (13)$.

1) Trouver une solution particulière α de (E).
2) On pose $X = x - \alpha$, trouver alors toutes les solutions de (E).

EXERCICE 56

Le but de cet exercice est de trouver $x \in \mathbb{Z}$, solutions de (E) : $x^2 - 2x + 2 \equiv 0\ (17)$

1) Montrer que $\alpha = 5$ est une solution de (E).
2) On pose $X = x - \alpha$, trouver alors toutes les solutions de (E).

EXERCICE 57

1) Montrer que pour tous réels x et y, on a : $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
2) Résoudre alors dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $x^3 - y^3 = 127$.

EXERCICE 58

1) Décomposer en produit de facteurs premiers 8 633.
2) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$, l'équation : $x^2 - 4y^2 = 8\,633$.

Réciproque du théorème de Fermat

EXERCICE 59

Nombres de Poulet

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un entier impair tel que : $2^{n-1} \not\equiv 1\ (n)$.

1) Montrer que n n'est pas premier.
2) Quel est le reste de 2^{340} dans la division par 341 ?
Que cela signifie-t-il par rapport au petit théorème de Fermat ?
Un nombre comme 341 est appelé nombre de Poulet.
3) Parmi les nombres entiers inférieurs à 25 milliards, 1 091 987 405 sont premiers et seulement 21 853 sont des nombres de Poulet (donc non premier).
On prend un nombre n au hasard parmi les entiers inférieurs à 25 milliards et l'on décide de déclarer, après avoir calculé 2^{n-1} modulo n :
   - si $2^{n-1} \not\equiv 1\ (n)$, « n n'est pas premier »,
   - si $2^{n-1} \equiv 1\ (n)$, « n est premier ».

   a) Quelle est la probabilité d'énoncer un résultat faux ?
   b) Quelle est la probabilité que le nombre soit premier sachant qu'il a été annoncé comme tel ?

EXERCICE 60

Nombres de Carmichaël

Un nombre de Carmichaël est un entier n non premier qui vérifie la propriété :
« Pour tout entier a premier avec n, l'entier n est un diviseur de $(a^n - a)$. »

1) a) Soit $n = 561$. Décomposer n en produit de facteurs premiers.
   b) Vérifier que pour tout facteur premier p de n, $(p-1)$ divise $(n-1)$.
   c) En déduire que pour tout entier a premier avec n, on a : $a^{n-1} \equiv 1\ (n)$ et que n est un nombre de Carmichaël.
2) Reprendre les mêmes questions avec $n = 1\,105$.
3) En quoi ces deux exemples montrent que la réciproque du petit théorème de Fermat n'est pas vérifiée ?

Nombres de Mersenne et de Fermat

EXERCICE 61

Nombres de Mersenne bis

Un nombre de Mersenne M_n est de la forme $M_n = 2^n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
On a montré que si M_n est premier alors n est premier et que la réciproque est fausse.
On veut montrer que si n est un nombre premier impair, alors tout diviseur premier p de M_n est de la forme $p = 2kn + 1$.
Soit E l'ensemble des nombres s, non nuls, tels que : $2s \equiv 1\ (p)$.
Soit s_0 son plus petit élément.

1) On divise s par s_0 : $s = s_0 q + r$ avec $0 \leqslant r < s_0$. Montrer que $r = 0$.
2) En déduire que s_0 divise n puis que $s_0 = n$. :
3) À l'aide du petit théorème de Fermat, montrer que n divise $(p-1)$ puis que $2n$ divise $(p-1)$. En déduire la forme du diviseur premier p de M_n.
4) Application : trouver un diviseur premier à M_{23}.

EXERCICE 62

Nombres de Fermat

1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$:
$$x^{2k+1} + 1 = (x+1)(x^{2k} - x^{2k-1} + \cdots + x^2 - x + 1)$$
   b) Montrer que si m est impair alors, $2^m + 1$ n'est pas premier.
   c) Montrer que si m est un entier possédant un diviseur strict impair alors, $2^m + 1$ n'est pas premier.
   d) En déduire que les seuls nombres premiers de la forme $(2^m + 1)$ sont de la forme $2^{2^n} + 1$.
2) On appelle nombre de Fermat, un nombre noté F_n tel que : $F_n = 2^{2^n} + 1$.
   a) Calculer F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 et vérifier qu'ils sont tous premiers.
   b) Fermat pensait que F_5 était également premier. Qu'en pensez vous ?
   On pourra utiliser un algorithme donnant la primalité d'un nombre.
   c) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$. En déduire $\text{pgcd}(F_n\ ,\ F_{n+1})$
3) Montrer par récurrence que tout nombre de Fermat pour $n \geqslant 2$ a une écriture décimale se terminant par 7.

Le système RSA

EXERCICE 63

Le nom du système de cryptage RSA provient des initiales des noms de ses inventeurs américains en 1977 : Ronald **R**ivest (informaticien), Adi **S**hamir (informaticien) et Leaonard **A**dleman (mathématicien).

Partie A : Arithmétique du système RSA

Soit p et q deux nombres premiers impairs distincts. On pose :
$n = pq$ et $m = (p-1)(q-1)$ et e tel que : $1 < e < m$ avec e premier avec m.

1) Montrer qu'il existe un entier d unique tel que : $1 \leqslant d < m$ et $ed \equiv 1 \ (m)$.
2) Prouver que pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a^{ed} \equiv a \ (n)$.
3) On choisit $p = 3$, $q = 11$ et $e = 7$. Calculer d

Partie B Envoi d'un message

Alice veut transmettre un message à Bob. Pour cela Bob diffuse à tout le monde (donc à Alice) les nombres n et e (clé publique).
Il garde pour lui les nombres p et q (clé privé) qui lui permettent de calculer d et déchiffrer un message.
Bob rend publique : $n = 33$ et $e = 7$.
Alice veut envoyer à Bob le mot : SALUT. Elle transforme les 5 lettres en nombres :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Alice code ces nombres avec la fonction « trappe » de Bob : $b = f_B(a) \equiv a^e \ (n)$.
Ainsi pour la lettre S : $a_1 = 18 \quad \to \quad 18^7 \equiv 6 \ (33)$, on obtient alors $b_1 = 6$.

1) Rentrer cette fonction en Python puis vérifier qu'Alice envoie à Bob les nombres suivants : 06 - 00 - 11 - 26 - 13
2) Bob décode avec sa fonction « trappe inverse » : $a = f_B^{-1}(b) \equiv b^d \ (n)$
   Expliquer pourquoi cette fonction f_B^{-1} permet de déchiffrer le message d'Alice.
3) La clé privée de Bob est $p = 3$ et $q = 11$.
   Il reçoit un deuxième message d'Alice avec les nombres :
   14 - 20 - 08 - 12 - 02 - 09 - 00 - 01 - 11 - 16.
   Rentrer la fonction inverse en Python puis décoder le message d'Alice.

Partie C Authentification

Le but est de montrer comment Bob peut être sûr de recevoir un message d'Alice.

Alice dispose également d'une clé publique (fonction trappe f_A) et d'une clé privée (fonction trappe inverse f_A^{-1}. Alice envoie à Bob un message contenant :

- ce qu'elle a à lui dire,
- une double signature : $A, f_A^{-1}(A)$.

Comment Bob peut-il s'assurer que le message vient bien d'Alice ?

Remarque : La clé publique (n, e) permet à « tout public » de transmettre un message à Bob. La clé personnelle (p, q) n'est connue que de Bob et lui permet d'être le seul à pouvoir déchiffrer le message en calculant d.
La sécurité du système réside dans la construction de nombre premier p et q très grands (300 chiffres) et la difficulté de décomposer le nombre n en produit de 2 nombres premiers.

Problèmes

Exercice 64

Une boîte, en forme de pavé droit, a des dimensions qui s'expriment, en cm, par des nombres entiers. Son volume est de 22,661 dm^3.

Quelles sont les dimensions de cette boîte ?

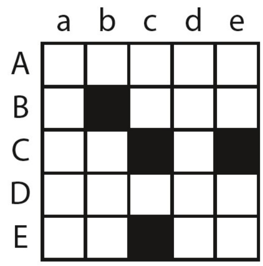
Exercice 65

Dans un annuaire de moins de 1 000 pages sont inscrits 999 991 noms. Chaque page contient le même nombre de noms.

1) Montrer que 997 est un nombre premier.
2) Combien de pages contient cet annuaire ?

Exercice 66

Horizontalement :
A. C'est un carré parfait.
B. Un nombre premier dont le produit de ses chiffres est 63 et sa somme 17.
C. Le produit de ses chiffres est 1.
D. Les chiffres de ce nombre, dans l'ordre, sont consécutifs.
E. Un multiple de 11. La somme de ses chiffres est supérieure de 1 à leur produit.

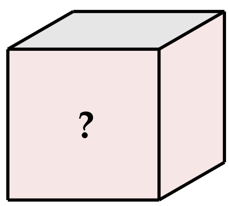


Verticalement :
a. C'est un cube parfait dont le produit de ses chiffres est 90.
b. Les chiffres, dans l'ordre, sont impairs consécutifs.
c. Un carré parfait, le produit de ses chiffres est 36.
d. Son premier chiffre et son dernier chiffre sont identiques, le produit de ses chiffres est 105.
e. La somme des chiffres est 7 et leur produit 6. Un multiple de 12.

Exercice 67

Dimension d'une cuve

Une cuve est à peu près cubique. Sa base est carrée. Les dimensions de la cuve sont des nombres entiers de décimètres et son volume est égal à 1 450 litres à 2 litres près.
Quelles sont les dimensions de la cuve ?
On expliquera la procédure et l'on justifiera le choix retenu.



Exercice 68

Ristournes

Un détaillant de matériel audiovisuel effectue trois remises successives de pourcentages entiers, sur un article qui coûtait 300 € et qu'il vend 222,87 €.
Quels sont les pourcentages des trois remises ?

EXERCICE 69

Problème de lampes

On considère 1 000 lampes numérotées de 1 à 1 000 qui peuvent être allumées ou éteintes. Une lampe change d'état lorsqu'elle passe d'éteinte à allumée et réciproquement. Au départ toutes les lampes sont éteintes et l'on effectue les 1 000 étapes suivantes.

Étape 1 : On allume toutes les lampes.

Étape 2 : Seules les lampes où le numéro est multiple de 2 changent d'état.

Étape 3 : Seules les lampes où le numéro est multiple de 3 changent d'état.

Ainsi de suite jusqu'à :
Étape 1 000 : Seules les lampes où le numéro est multiple de 1 000 changent d'état.

Quels sont les numéros des lampes qui sont allumées après ces 1 000 étapes ?

EXERCICE 70

L'âge du capitaine

Le capitaine dit à son fils :

« La cabine n° 1 abrite M. Dupont et ses deux filles. Le produit de leurs trois âges est 2 450 et la somme de leurs trois âges est égale à 4 fois le tien. Peux-tu trouver les âges des trois passagers ? »

Après un instant, le fils répond : « Non, il me manque une donnée. ».

Le capitaine ajoute alors : « Je suis plus âgé que M. Dupont. »

Le fils du capitaine en déduit alors les trois réponses.
Quel est l'âge du capitaine ? de son fils ? de M. Dupont ? des deux filles ?

EXERCICE 71

Cible

Combien faut-il de flèches pour faire un score de 100 points sur la cible ?