Correction du contrôle

Du jeudi 19 janvier 2023

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse c)** $D_{180} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180\}$

2) **Réponse d)** $-3\,471 = 17\times(-203)-20 = 17\times(-203)-34+14 = 17\times(-205)+14.$

3) **Réponse d)** $3x \equiv 6\ (9) \overset{k\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} 3x = 6+9k \overset{\div 3}{\Leftrightarrow} x = 2+3k \Leftrightarrow x \equiv 2\ (3).$

4) **Réponse c)** $3^{539} \equiv 3^{2\times 269+1} \equiv (3^2)^{269}\times 3 \overset{3^2\equiv -1\ (10)}{\equiv} (-1)^{269}\times 3 \equiv -3 \equiv 7\ (10)$

5) **Réponse c)** Soit le nombre $N = \overline{abc} = 100a+10b+c$

$$\begin{cases} 100a+10b+c-396=100c+10b+a \\ a+c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 99a-99c=396 \\ a+c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-c=4 \\ a+c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ c=2 \end{cases}$$

EXERCICE 2

Multiples **(4 points)**

1) $\dfrac{6n+9}{2n+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (6n+9)$ divise $(2n+1)$

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$6n+9 = k(2n+1) \Leftrightarrow 3(2n+1)+6 = k(2n+1) \Leftrightarrow (2n+1)(k-3) = 6$$

$(2n+1)$ divise 6 , on peut alors remplir le tableau suivant :

$2n+1$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$2n$	-7	-4	-3	-2	0	1	2	5
n	imp.	-2	imp.	-1	0	imp.	1	imp

Conclusion : $n \in \{-2, -1, 0, 1\}$

2) a) Cf cours

b) Soit d un diviseur commun de a et b donc d divise toute combinaison linéaire de a et b donc divise $4a-3b = 12k+16-12k-9 = 7$.
Les seuls diviseurs positifs de 7 sont 1 et 7 donc $d \in \{1, 7\}$.

EXERCICE 3

Congruence **(4 points)**

1) a) Établissons le cycle des reste de 4^n dans la division par 7 :
$4^0 \equiv 1\ (7)$, $4^1 \equiv 4\ (7)$, $4^2 \equiv 2\ (7)$, $4^3 \equiv 1\ (7)$. Le cycle est de 3.

On a le tableau de congruence suivant :

$n \equiv \ldots\ (3)$	0	1	2
$4^n \equiv \ldots\ (7)$	1	4	2

b) $130 = 7\times 18+4$ donc $130 \equiv 4\ (7)$ on a alors :

$$130^{60} \equiv 4^{60} \equiv (4^3)^{20} \equiv 1^{20} \equiv 1\ (7)$$

Le reste de 130^{60} dans la division par 7 est 1

2) a) Établissons le cycle des reste de 5^n dans la division par 9 :
$5^0 \equiv 1\ (9)$, $5^1 \equiv 5\ (9)$, $5^2 \equiv 7\ (9)$, $5^3 \equiv 8\ (9)$, $5^4 \equiv 4\ (9)$, $5^5 \equiv 2\ (9)$, $5^6 \equiv 1\ (9)$.

Le cycle est de 6. On peut remplir le tableau de congruence suivant :

$n \equiv \ldots\ (6)$	0	1	2	3	4	5
$5^n \equiv \ldots\ (9)$	1	5	7	8	4	2

b) On a $2021 = 9 \times 224 + 5$ donc $2021 \equiv 5\ (9)$ et $2023 = 6 \times 337 + 1$. On a alors :

$$2021^{2023} \equiv 5^{2023} \equiv (5^6)^{337} \times 5 \equiv 1^{337} \times 5 \equiv 5\ (9)$$

Le reste de 2021^{2023} dans la division par 9 est 5.

Exercice 4

Divisibilité **(4 points)**

1) Par double implication :

$n \equiv 0\ (19) \Leftrightarrow 10a + b \equiv 0\ (19) \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 20a + 2b \equiv 0\ (19) \overset{20\equiv 1\ (19}{\Leftrightarrow} a + 2b \equiv 0\ (19)$

Réciproquement

$a + 2b \equiv 0\ (19) \overset{\times 10}{\Leftrightarrow} 10a + 20b \equiv 0\ (19) \overset{20\equiv 1\ (19)}{\Leftrightarrow} 10a + b \equiv 0\ (19) \Leftrightarrow n \equiv 0\ (19)$

2) Un entier est divisible par 19 si, et seulement si, la somme du nombre de ses dizaine et de 2 fois le chiffre de ses unités est divisible par 19.

3) 448 : $44 + 16 = 60$ et $6 + 0 = 6$ non divisible par 19.

6 859 : $685 + 18 = 703$, $70 + 6 = 76$ et $7 + 12 = 19$ divisible par 17.

Exercice 5

Théorème chinois **(3 points)**

1) On a $11 \equiv 3 \times 3 + 2 \equiv 2\ (3)$ et $11 \equiv 5 \times 2 + 1 \equiv 1\ (5)$.
11 est donc solution de (S).

2) Soit n une solution de (S) alors $\begin{cases} n \equiv 2\ (3) \\ n \equiv 1\ (5) \end{cases}$ et $\begin{cases} 11 \equiv 2\ (3) \\ 11 \equiv 1\ (5) \end{cases} \overset{\text{différence}}{\Rightarrow} \begin{cases} n - 11 \equiv 0\ (3) \\ n - 11 \equiv 0\ (5) \end{cases}$

$(n - 11)$ est alors divisible par 3 et par 5 et comme $\text{pgcd}(3,5) = 1$ donc $(n - 11)$ est divisible par 15.

3) Réciproquement si $(n - 11)$ est divisible par 15 alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$n - 11 = 15k \Rightarrow n = 11 + 15k$ et $\begin{cases} 11 + 15k \equiv 2\ (3) \\ 11 + 15k \equiv 1\ (5) \end{cases}$

n est alors solution de (S).
De 2) et 3) les seules solutions de (S) sont de la forme $n = 11 + 15k$, $k \in \mathbb{Z}$.