Correction du contrôle

Du jeudi 16 octobre 2025

EXERCICE 1

Forme algébrique **(2 points)**

1) $z_1 = \dfrac{2+\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} = \dfrac{(2+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{3^2+1^2} = \dfrac{6-2\mathrm{i}+3\mathrm{i}+1}{10} = \dfrac{7}{10} + \dfrac{1}{10}\mathrm{i}$

2) $z_2 = \dfrac{(2+\mathrm{i})(1-4\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(2-8\mathrm{i}+\mathrm{i}+4)(1-\mathrm{i})}{1^2+1^2} = \dfrac{(6-7\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = \dfrac{6-6\mathrm{i}-7\mathrm{i}-7}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{13}{2}\mathrm{i}$

EXERCICE 2

Équations du premier degré **(3 points)**

1) $z - 3\mathrm{i} = \mathrm{i}\,z + 2 \;\Leftrightarrow\; z(1-\mathrm{i}) = 2+3\mathrm{i} \;\Leftrightarrow\; z = \dfrac{2+3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(2+3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{1^2+1^2} = \dfrac{2+2\mathrm{i}+3\mathrm{i}-3}{2}$

$z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\mathrm{i}.$

2) $(2-\mathrm{i})\,z + 1 = (3+2\mathrm{i})\,z - \mathrm{i} \;\Leftrightarrow\; (2-\mathrm{i}-3-2\mathrm{i})z = -1-\mathrm{i} \;\Leftrightarrow\; (-1-3\mathrm{i})z = -1-\mathrm{i} \;\Leftrightarrow$

$z = \dfrac{-1-\mathrm{i}}{-1-3\mathrm{i}} = \dfrac{(-1-\mathrm{i})(-1+3\mathrm{i})}{1^2+3^2} = \dfrac{1-3\mathrm{i}+\mathrm{i}+3}{10} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$

3) $\dfrac{2z+\mathrm{i}}{\mathrm{i}\,z} = \dfrac{2\mathrm{i}\,z}{1-z}$, $\quad D_f = \mathbb{C}^* - \{1\}$. Avec $z \in D_f$, on a :

$(2z+\mathrm{i})(1-z) = (2\mathrm{i}z)(\mathrm{i}z) \;\Leftrightarrow\; 2z - \cancel{2z^2} + \mathrm{i} - \mathrm{i}z = -\cancel{2z^2} \;\Leftrightarrow\; z(2-\mathrm{i}) = -\mathrm{i} \;\Leftrightarrow$

$z = \dfrac{-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \dfrac{-\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{2^2+1^2} = \dfrac{-2\mathrm{i}+1}{5} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}\mathrm{i} \in D_f$

EXERCICE 3

Équations du second degré **(4 points)**

1) $z^2 - 14z + 170 = 0, \quad \Delta = 196 - 680 = -484 = (22\mathrm{i})^2 < 0$

2 sol. complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{14+22\mathrm{i}}{2} = 7 + 11\mathrm{i}$ ou $z_2 = 7 - 11\mathrm{i}$

2) $z^2 + 34z + 627 = 0, \quad \Delta = 1156 - 2508 = -1352 = (26\mathrm{i}\sqrt{2})^2 < 0$

2 sol. compl. conjuguées : $z_1 = \dfrac{-34+26\mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = -17 + 13\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z_2 = -17 - 13\mathrm{i}\sqrt{2}$

EXERCICE 4

Racines d'un polynômes du 3ᵉ degré **(6 points)**

1) a) $P(-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}^3 - (1-\mathrm{i})\mathrm{i}^2 - (1-\mathrm{i})\mathrm{i} + \mathrm{i} = \mathrm{i} + 1 - \mathrm{i} - \mathrm{i} - 1 + \mathrm{i} = 0.$

b) $P(z) = (z+\mathrm{i})(z^2 + bz + 1)$, le coef devant z^2 : $b + \mathrm{i} = -1 + \mathrm{i} \;\Leftrightarrow\; b = -1.$

$P(z) = (z+\mathrm{i})(z^2 - z + 1)$ donc $P(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; z = -\mathrm{i}$ ou $z^2 - z + 1 = 0 \overset{\Delta=-3=(\mathrm{i}\sqrt{3})^2}{\Leftrightarrow}$

$z_1 = -\mathrm{i}$ ou $z_2 = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ ou $z_3 = \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

2) a) 2 racine évidente car : $Q(2) = 8 - 24 + 26 - 10 = 0$

b) $Q(z) = (z-2)(z^2 + bz + 5)$, le coef devant z^2 : $b - 2 = -6 \Leftrightarrow b = -4$.

$Q(z) = (z-2)(z^2 - 4z + 5)$ donc $Q(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2$ ou $z^2 - 4z + 5 = 0 \overset{\Delta=-4=(2i)^2}{\Leftrightarrow}$

$z_1 = 2$ ou $z_2 = \dfrac{4+2i}{2} = 2 + i$ ou $z_3 = 2 - i$

Exercice 5

Équation du second degré à coefficients complexes **(5 points)**

1) $\Delta = (3+2i)^2 - 4(5+i) = 9 + 12i - 4 - 20 - 4i = -15 + 8i$.

2) $(1+4i)^2 = 1 + 8i - 16 = -15 + 8i$, donc $\Delta = (1+4i)^2$.

$\delta = 1 + 4i$ peut être considéré comme une racine carrée de Δ.

3) On obtient alors les deux solutions complexes de (E) :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{3+2i+1+4i}{2} = 2 + 3i \quad \text{ou} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{3+2i-1-4i}{2} = 1 - i$$