Chien poursuivant un scooter

Un scooter commandé se déplace en ligne droite à la vitesse constante de 1 m.s^{-1}. Il est poursuivi par un chien qui se déplace à la même vitesse.

Modélisation à l'aide d'une suite

À l'instant initial, le scooter est représenté par le point S_0. Le chien qui le poursuit est représenté par le point M_0. On considère qu'à chaque seconde, le chien s'oriente instantanément en direction du scooter et se déplace en ligne droite sur une distance de 1 mètre.

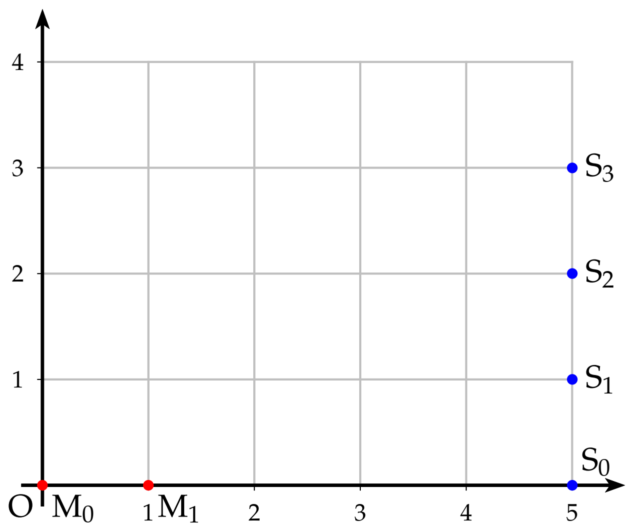
Ainsi, à l'instant initial, le chien s'oriente en direction du point S_0, et une seconde plus tard il se trouve un mètre plus loin au point M_1. À cet instant, le scooter est au point S_1. Le chien s'oriente en direction de S_1 et se déplace en ligne droite en parcourant 1 mètre, et ainsi de suite.

On modélise alors les trajectoires du chien et du scooter par deux suites de points notées (M_n) et (S_n).

Au bout de n secondes, les coordonnées du point S_n sont $(5\,;\,n)$.
On note $(x_n\,;\,y_n)$ les coordonnées du point M_n.

1) On représente la situation vue de dessus dans un repère orthonormé du plan d'unité 1 mètre. L'origine de ce repère est la position initiale du chien. Le scooter est représenté par un point appartenant à la droite d'équation $x = 5$. Il se déplace sur cette droite dans le sens des ordonnées croissantes.

   Recopier le graphique ci-dessous puis construire, à la règle et au compas, les points M_2 et M_3. On laissera les traits de construction.



2) On note d_n la distance entre le chien et le scooter n secondes après le début de la poursuite. On a donc $d_n = M_nS_n$. Calculer d_0 et d_1.

3) Justifier que le point M_2 a pour coordonnées $\left(1 + \dfrac{4}{\sqrt{17}}\,;\,\dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

4) a) Montrer que les coordonnées du point M_n vérifient :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{5 - x_n}{d_n} \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{n - y_n}{d_n} \end{cases}$$

b) Ecrire un algorithme calculant les termes des suites (x_n), (y_n) et (d_n) de façon que l'algorithme affiche la valeurs de d_n pour une valeur n donnée.

5) a) Pourquoi dire que la suite (d_n) est décroissante, est vraisemblable.

b) En déduire que la suite (d_n) est convergente.

c) Conjecturer sa limite à l'aide de l'algorithme de la question 4b).
Que peut-on conclure ?