# Constante d'Euler
# Algorithme

## 1 Définition

Soit la suite $u_n$) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$

### 1.1 Monotonie de la suite

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n}$$

On pose alors la fonction $f$ définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \ln\dfrac{x+1}{x}$

Par composition, on montre que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} \geqslant 0$$

La fonction $f$ est donc croissante sur $[1;+\infty[$

D'après le tableau de variation, la fonction $f$ est négative sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\dfrac{1}{2} - \ln 2 \simeq -0,193$ $\nearrow$ | $0$ |

De la fonction $f$, on en déduit que : $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} - u_n < 0$.
La suite $(u_n)$ est **décroissante**.

### 1.2 Minoration de la suite

a) Montrons que $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$

Si $x \in [k\,;\,k+1]$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, alors $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{x} \geqslant 0$

De la positivité de l'intégrale : $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\frac{x}{k} - \ln x\right]_k^{k+1} \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{k+1}{k} - \ln k + 1 - 1 + \ln k \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln k + 1 - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$$

b) En appliquant cette inégalité aux rangs de 1 à $n$, on a par addition des lignes suivantes :

$$\begin{aligned}
\ln 2 - \ln 1 &\leqslant 1 \\
\ln 3 - \ln 2 &\leqslant \frac{1}{2} \\
\ln 4 - \ln 3 &\leqslant \frac{1}{3} \\
\dots \quad \dots &\leqslant \dots \\
\ln(n+1) - \ln n &\leqslant \frac{1}{n} \\
\hline
\ln(n+1) - \ln 1 &\leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$\ln n \leqslant \ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \geqslant 0$$

$\forall \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geqslant 0,$

la suite $(u_n)$ est minorée par 0.

### 1.3 Convergence

La suite $(u)$ est décroissante et minorée par 0, d'après le théorème des suites monotones, la suite $(u_n)$ converge vers $\gamma$.

Cette limite $\gamma$ est appelée **constante d'Euler**.

$\gamma = 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,860\,61\dots$

## 2 Algorithme

On commence à calculer la somme des inverses (suite harmonique) puis l'on soustrait $\ln n$

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAM:EULER
:Prompt N
:0→U
:For(I,1,N)
:U+1/I→U
:End
:U-ln(N)→U
:Disp U
:
```

**Variables** : $N \geqslant 1$, $I$ : entiers, $U$ : réel
**Entrées et initialisation**
  Lire $N$
  $0 \to U$
**Traitement**
  **pour** $I$ de 1 à $N$ **faire**
    $U + \frac{1}{I} \to U$
  **fin**
  $U - \ln N \to U$
**Sorties** : Afficher $U$

La convergence de la suite $(u_n)$ est particulièrement lente, comme le montre le tableau ci-dessous.

| $N$ | 10 | 50 | 200 | 500 | 1 000 | 2 000 | 5 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_N$ | 0,626 4 | 0,587 2 | 0,579 7 | 0,578 2 | 0,577 7 | 0,577 5 | 0,577 3 |

Après 5 000 itérations, on ne connaît que 3 décimales, ce qui n'est vraiment pas satisfaisant.

**Remarque :** On peut montrer que l'erreur commise $|u_N - \gamma|$ est de l'ordre de $\dfrac{1}{2N}$

Pour approcher plus rapidement $\gamma$, on définit la suite :

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{24n}\right) = u_n - \ln\left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2}\right)$$

On montre facilement que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \gamma$

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAM:EULER2
:Prompt N
:0→V
:For(I,1,N)
:V+1/I→V
:End
:V-ln(N+.5+1/(24N))→V
:Disp V
:
```

**Variables** : $N \geqslant 1$, $I$ : entiers, $V$ : réel
**Entrées et initialisation**
Lire $N$
$0 \to V$
**Traitement**
**pour** $I$ de 1 à $N$ **faire**
$V + \dfrac{1}{I} \to V$
**fin**
$V - \ln\left(n + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{24n}\right) \to V$
**Sorties** : Afficher $V$

La convergence de la suite $(v_n)$ est cette fois plus satisfaisante, la précision est alors de l'ordre de $\dfrac{1}{48N^3}$.

| $N$ | 3 | 30 | 300 |
|---|---|---|---|
| $v_N$ | 0,576 4 | 0,577 214 9 | 0,577 215 664 1 |
| $\lvert v_N - \gamma\rvert$ | $6,1 \times 10^{-4}$ | $7.5 \times 10^{-7}$ | $7.7 \times 10^{-10}$ |

## 3 Un peu d'histoire

La constante d'Euler $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ dite parfois constante de Mascheroni, a fait l'objet d'un grand nombre de travaux et d'évaluations numériques depuis le XVIIIe siècle. Elle garde néanmoins encore beaucoup de son mystère aujourd'hui. Ainsi, on ne sait toujours pas si $\gamma$ est ou non irrationnel, en dépit de plusieurs tentatives de démonstration, dont celle de P. Appell en 1926 qui avorta par suite d'une erreur matérielle, et celle de A. Froda en 1965 qui repose sur un critère d'irrationalité encore incomplètement démontré.

La première évaluation de $\gamma$ est due naturellement à Leonhard Euler, qui obtint la valeur 0,577 218 en 1735, bientôt étendue par Mascheroni et quelques autres. En 1781, Euler détermina la valeur plus précise 0,577 215 609 301 532. Il fut suivi notamment par Gauss, avec 22 décimales exactes, puis par un certain nombres de mathématiciens anglais du XIXe siècle. En 1878, le célèbre mathématicien-astronome J.C. Adams calcula laborieusement 263 décimales, record qui devait tenir depuis sa publication en 1878 jusqu'à l'apparition des premiers ordinateurs et les 328 décimales de J. W. Wrench Jr en 1952.

Tous ces calculs, ainsi que celui ultérieur de D. E. Knuth en 1962 avec 1 271 décimales, reposaient sur le développement asymptotique de $1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n} - \ln n$ par la formule d'Euler-Mac Laurin. Le temps de calcul prohibitif des nombres de Bernoulli requis dans cette méthode conduisit Dura W. Sweeney à introduire un nouvel algorithme plus efficace, basé sur la formule $\gamma = \int_0^{+\infty} \ln x\, e^{-x} \mathrm{d}x$. Sweeney obtint ainsi 3 566 décimales en 1963, et sa méthode fut reprise successivement par Beyer-Waterman en 1974 (7 119 décimales, dont 4 879 exactes) et par R.P. Brent (20 700 décimales en 1977). Enfin en 1980, R.P.Brent et E.Mc Millan découvrirent un nouvel algorithme plus performant, utilisant les fonctions de Bessel, et calculèrent 30 100 décimales. Le record actuel est de 119 377 958 182 décimales obtenues en 2013 par A.Yee avec 50 jours de calcul ! !