

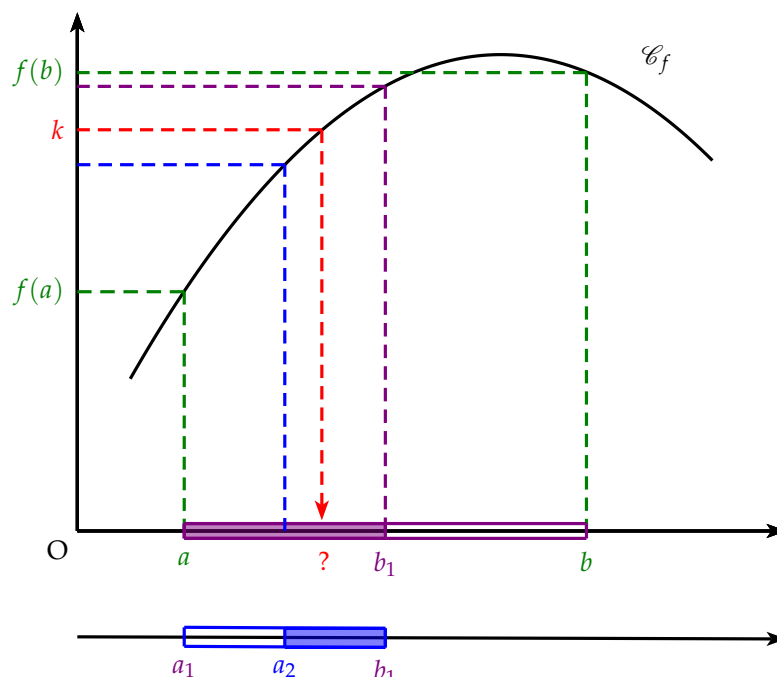
Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires

1 Le théorème

Théorème 1 : Soit une fonction définie et **continue** sur un intervalle $I = [a, b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel $c \in I$ tel que $f(c) = k$.

2 La démonstration

On a la figure suivante :



Création de deux suites adjacentes

Supposons $f(a) < f(b)$. (Quitte à poser $g = -f$ sinon)

Nous allons construire deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) par l'algorithme suivant :

- Si le milieu m de l'intervalle $[a, b]$ est tel que $f(m) \geq k$ alors :
on pose $a_1 = a$ et $b_1 = m$
- Sinon, on pose $a_1 = m$ et $b_1 = b$.

On a ainsi : $a \leq a_1 \leq b_1 \leq b$ et $f(a_1) \leq k \leq f(b_1)$

On recommence le découpage :

- Si le milieu m de l'intervalle $[a_1, b_1]$ est tel que $f(m) \geq k$ alors :
on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = m$
- Sinon, on pose $a_2 = m$ et $b_2 = b_1$.

On a ainsi : $a \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 \leq b$ et $f(a_2) \leq k \leq f(b_2)$

En répétant ce procédé, on construit ainsi une suite de segments emboîtés :

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

De plus, par construction, la longueur de $[a_n, b_n]$ est $\frac{b-a}{2^n}$

Les segments $[a_n, b_n]$ ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

Notons c leur limite commune (ce réel c est dans l'intervalle $[a, b]$)

Montrons que $f(c) = k$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$

Par passage à la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \leq k \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$

Or, f est continue en c , donc : $f(c) \leq k \leq f(c)$

Donc : $f(c) = k$

On a donc bien montré qu'il existe un réel c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarque : l'hypothèse de continuité est indispensable dans le théorème. Essayer d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction « partie entière » avec $a = 0$, $b = 1$ et $k = \frac{1}{2}$

