

Algorithme sur la méthode Newton-Raphson

1 Historique

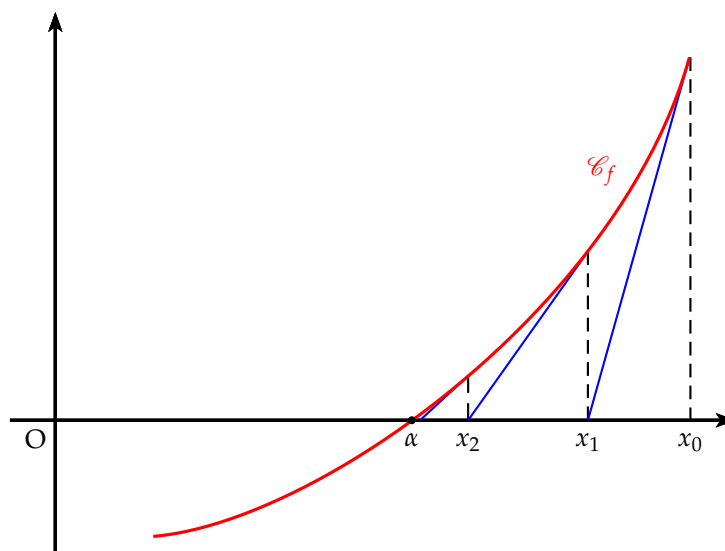
La méthode de résolution des équations numériques a été initiée par Isaac Newton vers 1669 sur des exemples numériques mais la formulation était fastidieuse. Dix ans plus tard, Joseph Raphson met en évidence une formule de récurrence. Un siècle plus tard, Mouraille et Lagrange étudient la convergence des approximations successives en fonction des conditions initiales par une approche géométrique. Cinquante ans plus tard, Fourier et Cauchy s'occupe de la rapidité de la convergence.

2 Le principe

2.1 La méthode

La méthode consiste à introduire une suite (x_n) d'approximation successives de l'équation $f(x) = 0$.

- On part d'un x_0 proche de la solution.
- À partir de x_0 , on calcule un nouveau terme x_1 de la manière suivante : on trace la tangente à \mathcal{C}_f en x_0 . Cette tangente coupe l'axe des abscisses en x_1 comme indiqué sur le figure ci-dessous.
- On réitère ce procédé en calculant x_2 en remplaçant x_0 par x_1 , puis x_3 en remplaçant x_1 par x_2 et ainsi de suite ...



2.2 Formule de récurrence

x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à \mathcal{C}_f en x_n avec l'axe des abscisses.

L'équation de la tangente en x_n est : $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$

Cette tangente coupe l'axe des abscisse quand $y = 0$:

$$\begin{aligned} f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) = 0 &\Leftrightarrow f'(x_n)(x - x_n) = -f(x_n) \\ x - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &\Leftrightarrow x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}$$

On a donc la relation de récurrence suivante : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

2.3 Conditions d'application

Pour que la suite (x_n) existe :

- La fonction f doit être dérivable en chacun des points considérés. En pratique la fonction doit être dérivable dans un intervalle centré en α contenant x_0 .
- La dérivée ne doit pas s'annuler sur cet intervalle.

Pour que la suite (x_n) soit convergente, les conditions dépassent le cours de terminale, mais en pratique, il faut prendre un x_0 assez proche de la valeur α qui annule la fonction. On le détermine à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

2.4 Algorithme

Lorsque la suite converge, elle converge de façon quadratique c'est à dire que le nombre de chiffres significatifs double à chaque itération. Si l'on s'en tient à une précision inférieure à 10^{-15} , la suite doit alors converger en moins de 10 itérations. On pourra mettre une condition d'arrêt de l'algorithme lorsque le nombre de boucle dépassera 10 car alors la suite ne converge pas. Il faudra alors prendre un x_0 plus proche de α .

On prendra comme critère d'arrêt pour une précision de p : $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < 10^{-p}$

Pour utiliser cet algorithme, il faudra calculer la fonction dérivée et rentrer les fonctions f et f' dans la calculatrice.

On peut alors proposer l'algorithme suivant :

```

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAM:NEWTON
:Prompt P,X
:0→N
:While abs(Y1(X)/Y2(X))≥10
^ -P et N≤10
:X-Y1(X)/Y2(X)→X
:N+1→N
:End
:Disp N,X
:

```

Variables : P, X, N entiers
 f, f' fonctions

Entrées et initialisation
 Lire P, X
 $0 \rightarrow N$

Traitement
 tant que $\left| \frac{f(X)}{f'(X)} \right| \geq 10^{-P}$ et $N \leq 10$ faire
 $X - \frac{f(X)}{f'(X)} \rightarrow X$
 $N + 1 \rightarrow N$
 fin

Sorties : Afficher N, X

3 Un exemple

Prenons l'exemple historique qu'avait pris Newton pour expliquer sa méthode : Déterminer une approximation de la solution de : $x^3 - 2x - 5 = 0$

3.1 L'équation admet une unique solution entre 2 et 3

On pose la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 2x - 5$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} (car polynôme) et : $f'(x) = 3x^2 - 2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \approx \pm 0,816$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$		$\approx -3,911$		$\approx -6,089$	$+\infty$

A l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 5 \approx -3,911 \text{ et } f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 5 \approx -6,089$$

D'après le tableau de variation :

- Si $x \in]-\infty ; \sqrt{\frac{2}{3}}[$, alors $f(x) < 0$. La fonction ne peut s'annuler.
- Si $x \in \left[\sqrt{\frac{2}{3}} ; +\infty\right[$, la fonction f est continue (car dérivable), monotone et $f(x) \in [-6,089 ; +\infty[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α tel que $f(\alpha) = 0$

On peut affiner l'intervalle de α : $f(2) = -1$ et $f(3) = 16$ donc $\alpha \in [2 ; 3]$

La fonction f ne s'annule qu'une seule fois sur \mathbb{R} et la solution $\alpha \in [2 ; 3]$

3.2 Utilisation de l'algorithme

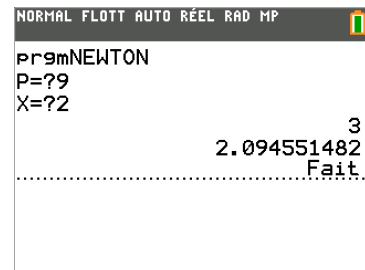
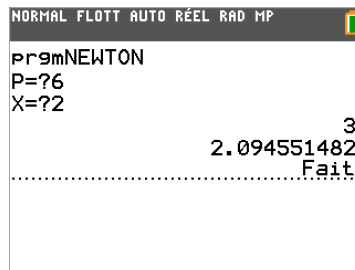
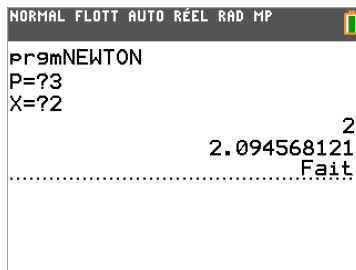
On peut utiliser pour x_0 soit 2 soit 3, mais $f(2)$ est plus proche de 0, sa convergence est plus rapide.

Si l'on effectue l'algorithme à la main, on a le tableau suivant pour une précision de 10^{-3} :

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	x_{n+1}
0	2	-1	10	0,1	2,1
1	2,1	0,061	11,23	-0,005 43	2,094 57
2	2,094 57	2×10^{-4}	11,16	-2×10^{-5}	2,094 55

On s'aperçoit de la redoutable efficacité de cet algorithme car en deux termes il arrive à une précision de 10^{-3} .

A l'aide de la calculatrice, on obtient les valeurs successives suivante en rentrant comme valeur initiale $x_0 = 2$ et en donnant successivement les valeurs 3, 6 et 9 pour p



On peut comparer cet algorithme avec l'algorithme de dichotomie à l'aide du nombre de boucles que le programme effectue pour une précision donnée.

Précision	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
Newton	2	3	3
Dichotomie	10	20	30

Nbre de boucles pour une précision donnée