La fonction exponentielle

Table des matières

1 La fonction exponentielle **2**

1.1 Définition et théorèmes . . . 2
1.2 Approche graphique de la fonction exponentielle . . . 3
1.3 Relation fonctionnelle . . . 3
1.4 Autres opérations . . . 4
1.5 Notation . . . 4

2 Étude de la fonction exponentielle **5**

2.1 Signe . . . 5
2.2 Variation . . . 5
2.3 Limites . . . 6
2.4 Courbe représentative . . . 6
2.5 Des limites de référence . . . 7
2.6 Étude d'une fonction . . . 8

3 Compléments sur la fonction exponentielle **10**

3.1 Dérivée de la fonction e^u . . . 10
3.2 Exemples types . . . 10
3.2.1 Fonctions d'atténuation . . . 10
3.2.2 Chute d'un corps dans un fluide . . . 11
3.2.3 Fonctions gaussiennes . . . 13

Avant propos

Le but de ce chapitre est de construire une des fonctions mathématiques les plus importantes. Elle est en effet présente dans toutes les sciences. Sa construction à partir d'une équation différentielle est passionnante, bien qu'historiquement elle ne se soit pas construite ainsi.

1 La fonction exponentielle

1.1 Définition et théorèmes

Théorème 1 : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

On nomme cette fonction exponentielle et on la note : exp

ROC Démonstration : L'existence de cette fonction est admise.
Démontrons l'unicité.

- **La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.**

  Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = f(x)f(-x)$.
  Montrons que la fonction φ est constante. Pour cela dérivons φ.

  $$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$$

  Comme $f' = f$, on a :

  $$\begin{aligned} &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Comme $\varphi' = 0$ alors la fonction φ est constante. Donc :

  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \varphi(0) = f^2(0) = 1$$

  On en déduit alors : $f(x)f(-x) = 1$, donc la fonction f ne peut s'annuler.

- **Unicité**

  On suppose que deux fonctions f et g vérifient les conditions du théorème, soit $f = f'$, $g' = g$ et $f(0) = g(0) = 1$. La fonction g ne s'annule donc pas, on définit alors sur $\mathbb{R}$ la fonction h par $h = \dfrac{f}{g}$. On dérive h :

  $$h' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - fg}{g^2} = 0$$

  La fonction h est donc constante et $h(x) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = 1$

  On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

  On en déduit que $f = g$. L'unicité est ainsi prouvée. Nous noterons dans la suite cette fonction exp.

1.2 Approche graphique de la fonction exponentielle

Algorithme : Déterminer un algorithme permettant de visualiser la fonction exponentielle à partir de sa définition sur l'intervalle $[-A\ ;\ A]$.

On fera une approche de la fonction exponentielle à l'aide d'une approximation affine : $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$. L'approximation sera d'autant meilleure que h sera petit

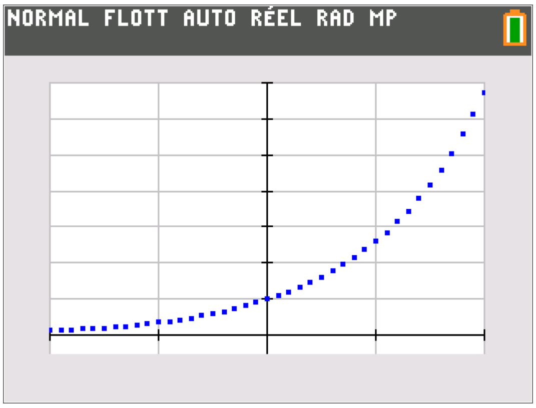
Comme la fonction exponentielle vérifie $f' = f$, cette approximation affine devient alors :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf(a) \approx f(a)(1+h)$$

On commence à tracer le point $(0\,;1)$ car $f(0)=1$, puis avec un pas P, on trace de proche en proche les points à droite $(X\ ;\ Z)$ et les points à gauche $(-X\ ;\ T)$ du point $(0\,;1)$ dans l'intervalle $[-A\ ;\ A]$.

On obtient la courbe suivante pour : $A = 2$ et $P = 1/10$.

On prendra comme fenêtre :
$X \in [-2\ ;\ 2]$ et $Y \in [-0,5\ ;\ 7]$



Variables : A, P : entiers
X, Z, T : réels
Entrées et initialisation
Lire A, P
$0 \to X$
$1 \to Z$
$1 \to T$
Effacer dessin
Tracer le point $(X; Z)$
Traitement
pour I de 1 à A/P **faire**
$X + P \to X$
$Z(1+P) \to Z$
$T(1-P) \to T$
Afficher le point $(X; Z)$
Afficher le point $(-X; T)$
fin

1.3 Relation fonctionnelle

Théorème 2 : Soit a et b deux réels, on a alors :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

Remarque : Cette relation s'appelle la relation fonctionnelle car on pourrait définir l'exponentielle à partir de cette propriété pour retrouver que l'exponentielle est égale à sa dérivée.

Démonstration : Posons la fonction $h(x) = \dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$.
Montrons alors que la fonction h n'est autre que la fonction exponentielle. Il suffit alors de montrer que $h' = h$ et $h(0) = 1$:

$$h'(x) = \frac{\exp'(x+a)}{\exp(a)} = \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = h(x)$$

$$h(0) = \frac{\exp(0+a)}{\exp(a)} = 1$$

La fonction h est donc la fonction exponentielle. On en déduit alors :

$$\frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = \exp(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exp(x+a) = \exp(x) \times \exp(a)$$

1.4 Autres opérations

Théorème 3 : Soit a et b deux réels et n un entier naturel, on a alors les relations suivantes :

- $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\exp(na) = [\exp(a)]^n$

Démonstration : Les démonstrations sont immédiates. La première se montre à l'aide de la fonction φ du 1.1 et la dernière propriété se montre par récurrence.

1.5 Notation

Définition 1 : : Du fait des propriétés similaires entre la fonction exponentielle et la fonction puissance, on pose :

- $e = \exp(1) \quad e \approx 2,718\ldots$
- $e^x = \exp(x)$

On a ainsi les propriétés :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{na} = (e^a)^n$

Remarque : On peut avoir une approximation du nombre e à l'aide de ce petit programme :

```
Variables : A, P : entiers  E : réel
Entrées et initialisation
    Lire P
    1 → E
Traitement
    pour I de 1 à 1/P faire
        | E(1 + P) → E
    fin
Sorties : Afficher E
```

On trouve pour :

- $P = 10^{-2}$, $E \approx 2,705$
- $P = 10^{-3}$, $E \approx 2,717$

2 Étude de la fonction exponentielle

2.1 Signe

Théorème 4 : La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$

Démonstration : On sait que $\exp(x) \neq 0$ pour tout réel. De plus la fonction exponentielle est continue car dérivable sur $\mathbb{R}$. S'il existait un réel a tel que $\exp(a) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existerait un réel α tel que $\exp(\alpha) = 0$ ce qui est impossible. La fonction exponentielle est donc strictement positive.

2.2 Variation

Théorème 5 : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Immédiat du fait que sa dérivée est elle-même et que l'exponentielle est strictement positive.

Conséquence Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on peut écrire les équivalences suivante :

Règle 1 : Soit a et b deux réels, on a les équivalences suivantes :

$$e^a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \qquad\qquad e^a > 1 \quad \Leftrightarrow \quad a > 0$$

$$e^a = e^b \quad \Leftrightarrow \quad a = b \qquad\qquad e^a < e^b \quad \Leftrightarrow \quad a < b$$

Exemples :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x^2+3} = e^{7x}$

  D'après les équivalences ci-dessus, l'équation est équivalente à :

  $$2x^2 + 3 = 7x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

  On calcule : $\Delta = 49 - 24$ soit $\Delta = 25 = 5^2$, on obtient les deux solutions suivantes :

  $$x_1 = \frac{7+5}{4} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad S = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $e^{3x} \leqslant e^{x+6}$

  D'après les équivalences ci-dessus, l'équation est équivalente à :

  $$3x \leqslant x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \leqslant 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 3 \quad \text{soit} \quad S =]-\infty; 3]$$

2.3 Limites

Théorème 6 : On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

ROC **Démonstration :** Soit la fonction f suivante : $f(x) = e^x - x$.

Dérivons la fonction f : $f'(x) = e^x - 1$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on a :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0 \quad \text{et} \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Du tableau de variation on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0 \quad$ donc $\quad e^x > x$

or on sait que $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, par comparaison on a :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

En faisant le changement de variable $X = -x$, on obtient :

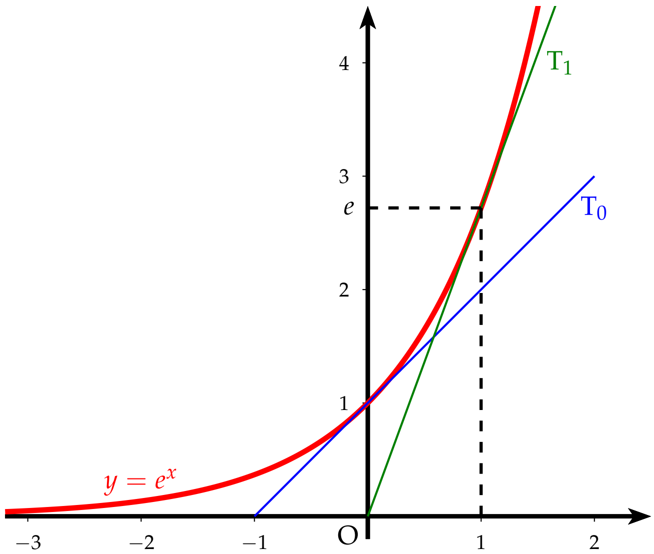
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

2.4 Courbe représentative

D'après les renseignements obtenus, on a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		
$\exp(x)$	0	1	e	$+\infty$

On obtient la courbe suivante :



2.5 Des limites de référence

Théorème 7 : On a : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Démonstration : La démonstration découle de la définition de la dérivée en 0 appliquée à la fonction e^x.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$$

Théorème 8 : Croissance comparée

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -\infty} xe^x = 0$$

Démonstration : Comme pour la limite de e^x en $+\infty$, on étudie les variations d'une fonction. Soit donc la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$$

On calcule la dérivée g' : $g'(x) = e^x - x$

D'après le paragraphe 2.3, on a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > x \quad$ donc $\quad g'(x) > 0$

La fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
Or $g(0) = 1$ donc si $x > 0$ alors $g(x) > 0$. On en déduit donc que :

$$\text{Pour } x > 0 \quad g(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x > \frac{x^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, par comparaison, on a :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Pour la deuxième limite, on fait un changement de variable $X = -x$, on obtient alors :

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{X \to +\infty} (-X)e^{-X} = -\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$$

Conséquence : à l'infini, la fonction exponentielle « l'emporte » sur la fonction x.

2.6 Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 1}$

1) Pourquoi les droites d et Δ d'équation respectives $y = 2$ et $y = -3$ sont-elles asymptotes à $\mathscr{C}_f$?
2) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f.
3) Tracer d, Δ et $\mathscr{C}_f$
4) La courbe semble avoir un point de symétrie. Démontrer cette conjecture.

1) On étudie les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   a) En $+\infty$. On a une forme indéterminée, on change donc la forme de la fonction :

   $$f(x) = \frac{e^x\left(2 - \dfrac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right)} = \frac{2 - \dfrac{3}{e^x}}{1 + \dfrac{1}{e^x}}$$

   On a : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{e^x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

   Par quotient, on a donc : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d en $+\infty$ d'équation $y = 2$.

   b) En $-\infty$, on a :

   $$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \to -\infty} 2e^x - 3 = -3 \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} e^x + 1 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient, on a} \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3 \end{array}$$

   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale Δ en $-\infty$ d'équation $y = -3$.

2) On calcule la dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^x(e^x+1) - e^x(2e^x - 3)}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^x(2x^x + 2 - 2e^x + 3)}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{5e^x}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

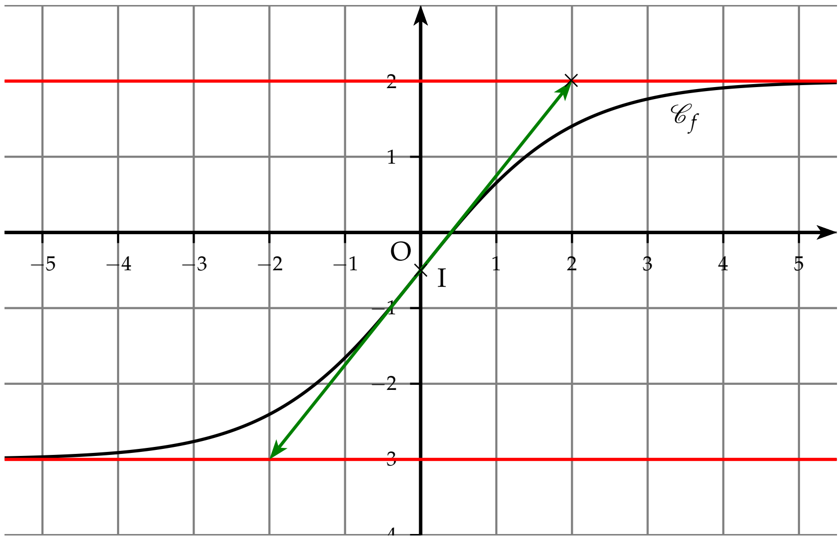
3) On a le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-3 ↗	2

4) Pour tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, il est important de placer un point et sa tangente. Par exemple le point I d'abscisse nul. On a :

$$f(0) = -\frac{1}{2} \qquad f'(0) = \frac{5}{4}$$

On obtient la courbe suivante :



5) La courbe semble symétrique par rapport au point I. Pour le démontrer, prenons un nouveau repère centré en I. Un point $M(x, y)$ a pour coordonnées dans le nouveau repère $M(X, Y)$. On a alors :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x \\ Y = f(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2e^X - 3}{e^X + 1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4e^X - 6 + e^X + 1}{2(e^X + 1)} = \dfrac{5(e^X - 1)}{2(e^X + 1)} \end{cases}$$

Montrons que la fonction $g(X) = \dfrac{5(e^X - 1)}{2(e^X + 1)}$ est impaire.

On a :

$$g(-X) = \frac{5(e^{-X} - 1)}{2(e^{-X} + 1)} = \frac{5(1 - e^X)}{2(1 + e^X)} = -g(X)$$

La fonction g est impaire, donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à I

3 Compléments sur la fonction exponentielle

3.1 Dérivée de la fonction e^u

Théorème 9 : Soit la fonction u définie et dérivable sur un ensemble $\mathcal{D}$, alors la fonction e^u est dérivable sur $\mathcal{D}$ et :

$$(e^u)' = u'e^u$$

3.2 Exemples types

3.2.1 Fonctions d'atténuation

Définition 2 : Soit un réel k **strictement positif**, on définit les fonctions f_k sur $\mathbb{R}$ par :

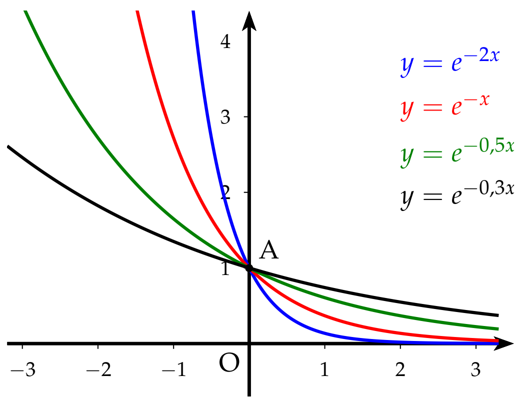
$$f_k(x) = e^{-kx}$$

Par composition, on a les limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = +\infty$

On calcule la dérivée : $f_k'(x) = -ke^{-kx} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\searrow$	0



Remarque : Plus le coefficient k est important plus l'atténuation est grande.

On retrouve très souvent ces fonctions en physique, par exemple :

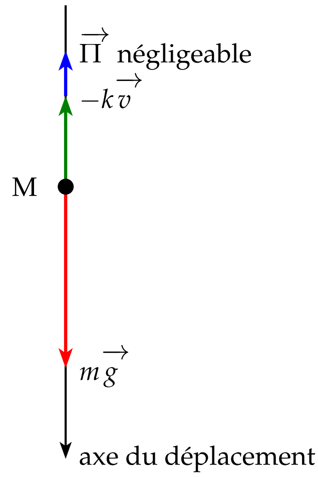
- avec la loi de désintégration radioactive où le nombre de noyaux en fonction du temps obéit à : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$
- la décharge d'un condensateur dans un circuit RC où le courant obéit à : $i(t) = \dfrac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$
- dans l'expression d'une force de frottement proportionnelle à la vitesse (chute libre dans l'air) que nous allons développer.

3.2.2 Chute d'un corps dans un fluide

On cherche à déterminer l'expression de la vitesse d'un corps dans l'air, c'est à dire dans notre environnement habituel. Lorsqu'on lache un corps M de masse m dans cet environnement, il est soumis à trois forces :

- son poids : $m\overrightarrow{g}$,
- une force de frottement : $-k\overrightarrow{v}$ qui s'oppose au mouvement et qui est proportionnelle à la vitesse
  Le coefficient k est déterminé par la forme du corps et de la compostion de l'atmosphère terrestre.
- la poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\Pi}$ que l'on négligera en raison de sa faible influence.

On oriente l'axe du déplacement vers le bas



D'après le second principe de la dynamique on a :

$$m\overrightarrow{a} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = m\overrightarrow{g} - k\overrightarrow{v}$$

en projetant sur l'axe du mouvement et en remarquant que l'accélération est la dérivée de la vitesse, on obtient :

$$mv' = mg - kv \quad \Leftrightarrow \quad v' = g - \frac{k}{m}v \quad (1)$$

Cette équation (1) est une équation différentielle, au même titre que le problème de départ de notre chapitre (trouver une fonction qui vérifie $f' = f$). Les solutions $v(t)$ de cette équation différentielle sont de la forme :

$$v(t) = \lambda e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

Comme la vitesse initiale $v(0) = 0$, on peut déterminer $\lambda = -\frac{mg}{k}$, ce qui donne pour l'expression de la vitesse :

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

Etude de la vitesse en fonction du temps : on détermine l'accélération en fonction du temps :

$$a(t) = v'(t) = \frac{mg}{k} \times \frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t} = ge^{-\frac{k}{m}t} \quad \text{donc} \quad v'(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Comme, on pouvait s'y attendre la vitesse est croissante. En effet un corps en chute libre voit sa vitesse augmenter.

Limite de la vitesse : $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = \frac{mg}{k}$

En effet :
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to +\infty} -\frac{k}{m}t = -\infty \\ \lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par composition} \\ \lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{k}{m}t} = 0 \end{array}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

t	0	$+\infty$
$a(t) = v'(t)$	$+$	
$v(t)$	$0 \nearrow$	$\dfrac{mg}{k}$

On constate alors que la vitesse d'un corps en chute libre dans l'air tend vers une vitesse limite : $v_{\text{lim}} = \dfrac{mg}{k}$

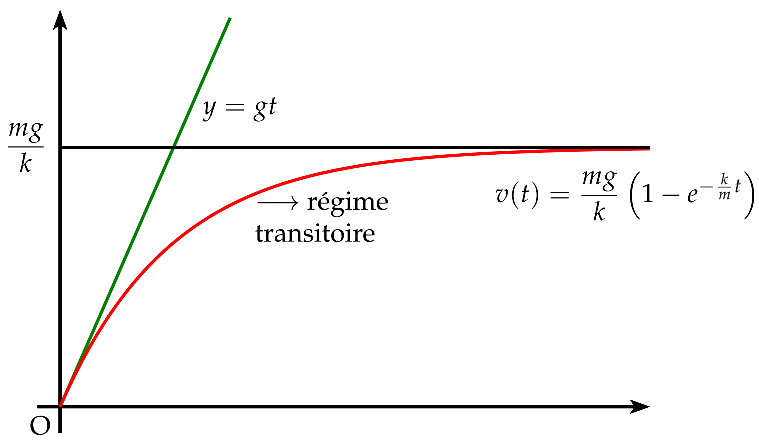
En effet, tout sportif ayant pratiqué "la chute libre" sait que la vitesse se stabilise au bout d'un certain temps. Elle atteint environ 200 km/h pour les jambes et les bras tendus. Si le coefficient m/k est très petit, comme pour une feuille d'arbre, la vitesse limite est particulièrement faible (1,8 km/h) ; ce qui permet à cette feuille de voltiger.

Tangente à la vitesse en 0. On a : $v'(0) = g$ et $v(0) = 0$. L'équation de la tangente en 0 est donc :

$$y = v'(0)t + v(0) \quad \text{donc} \quad y = gt$$

L'expression de la tangente en 0 correspond à l'expression de la vitesse de la chute libre dans le vide où le corps n'est soumis qu'à la pesanteur .

On obtient alors la représentation graphique de la vitesse en fonction du temps ainsi que la tangente en 0 suivante :



La vitesse augmente durant la période transitoire puis tend à se stabiliser vers sa vitesse limite.

Application numérique : On considère une balle de ping-pong de masse $m = 2,7$ g. Le coefficient de la force de frottement vaut $k = 5,4 \times 10^{-3}$ kg.s^{-1}. On prend $g = 9,80$ m.s^{-2}.

- Calculer la vitesse limite de cette balle de ping-pong en km/h
- Déterminer le temps nécessaire pour que la vitesse de la balle de pong-pong se situe à moins de 10^{-3} de sa vitesse limite en m/s

On obtient la vitesse limite : $v_{\lim} = \dfrac{mg}{k} = \dfrac{2,7 \times 10^{-3} \times 9,8}{5,4 \times 10^{-3}} = 4,9$ m/s soit $v_{\lim} = 4,9 \times 3,6 = 17,64$ km/h

On cherche ensuite le temps t pour que : $|v - v_{\lim}| < 10^{-3}$. On a alors :

$$\frac{mg}{k} e^{-\frac{k}{m}t} < 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad 4,9\, e^{-2t} < 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2t} < \frac{10^{-3}}{4,9}$$

A l'aide d'un tableau de valeurs ou à l'aide de la fonction ln, on obtient : $t > -\dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{10^{-3}}{4,9} \right) \quad \Leftrightarrow \quad t > 4,2$ s

Au bout de 4,2 s la vitesse de la balle s'est donc stabilisée à 17,64 km/h

3.2.3 Fonctions gaussiennes

Définition 3 : Soit un réel k **strictement positif**, on définit les fonctions g_k sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = e^{-kx^2}$$

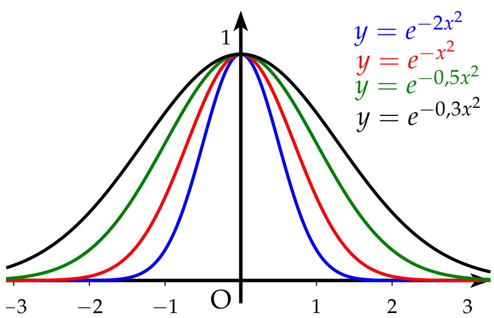
Par composition, on a les limites : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g_k(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} g_k(x) = 0$

On calcule la dérivée : $g_k'(x) = -2k\, xe^{-kx} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La dérivée g_k' est donc du signe de $-x$

On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_k(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Remarque : Ces fonctions interviennent en probabilité avec la loi normale. La représentation de ces fonctions s'appelle des courbes en cloches.