La fonction exponentielle

Opération sur la fonction exponentielle

EXERCICE 1

Simplifier les écritures suivantes :

a) $(e^x)^3 e^{-2x}$ b) $\dfrac{e^{x-1}}{e^{x+2}}$ c) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x}$ d) $e^{-x}e^2$

e) $\dfrac{e^{3x}}{(e^{-x})^2 \times e^x}$ f) $\dfrac{e^x e^y}{e^{x-y}}$

EXERCICE 2

Pour tout x, on pose : $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

a) Démontrer que $[g(x)]^2 - [h(x)]^2 = 1$

b) Démontrer que $g(2x) = 2\,[g(x)]^2 - 1$ et que $h(2x) = 2g(x) \times h(x)$.

c) Comparer ces relations avec les fonctions sinus et cosinus.

Équations et inéquations

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $e^{3-x} = 1$ 2) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$ 3) $2e^{-x} = \dfrac{1}{e^x + 2}$ 4) $e^{x^3} = e^8$

5) $e^{x+1} = e^{\frac{1}{x}}$ 6) $e^{\sin x} = e^{\frac{1}{2}}$ 7) $e^{x^2} = (e^2)^3 e^{-x}$ 8) $e^{x^2} = e^{x-2}$

EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $e^{x^2} \leqslant \dfrac{1}{e^2}$ 2) $(e^x)^3 \leqslant e^{x+6}$ 3) $e^x \leqslant \dfrac{1}{e^x}$

4) $(e^x - 1)e^x > e^x - 1$ 5) $e^{2x} < e^x$ 6) $3(e^x)^2 + e^x - 4 < 0$

Dérivées

EXERCICE 5

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{x}e^x$ 3) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1}$

4) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$ 5) $f(x) = x^2 - 2(x-1)e^x$

Calcul de limites

Exercice 6

Déterminer les limites des fonction f suivantes à l'endroit indiqué.

1) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2x}$ en 0, $+\infty$ et $-\infty$
2) $f(x) = 2xe^{-x}$ en $+\infty$
3) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1}$ en $+\infty$ et $-\infty$
4) $f(x) = e^{2x} - e^x + 1$ en $+\infty$ et $-\infty$
5) $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$ en $+\infty$ et $-\infty$
6) $f(x) = \dfrac{1}{x}(e^{2x} - 1)$ en 0 et $+\infty$
7) $f(x) = x + 2 + xe^x$ en $-\infty$

Étude d'une fonction

Exercice 7

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 1}$

1) Pourquoi les droite d et Δ d'équation respectives $y = 2$ et $y = -3$ sont-elles asymptotes à $\mathscr{C}_f$?
2) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f.
3) Tracer d, Δ et $\mathscr{C}_f$
4) La courbe semble avoir un point de symétrie. Démontrer cette conjecture.

Exercice 8

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (3 - x)e^x$. Justifier les affirmations suivantes :

1) Le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	e^2	↘ $-\infty$

2) Pour tout réel $m > 0$ et $m \neq e^2$, l'équation $f(x) = m$ admet soit aucune, soit deux solutions.

Exercice 9

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2}$.

1) Calculer $f(-x)$. Que peut-on conclure pour $\mathscr{C}_f$?
2) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3) Calculer la dérivée de f puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ pour $x \in [-2 ; 2]$ dans un repère orthonormal.
   Unité graphique : 2 cm sur les deux axes.

Fonction e^u

Exercice 10

Déterminer les fonctions dérivées suivantes :

1) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

2) $f(x) = 2(x-1)e^{x-1}$

3) $f(x) = \cos x e^{\sin x}$

4) $f(x) = e^{\frac{1+x}{1+x^2}}$

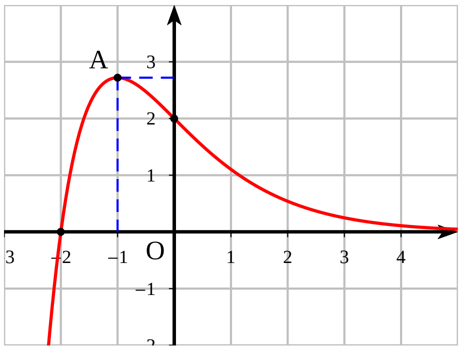
Exercice 11

La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax+b)e^{-x}$$

où a et b sont deux réels.

1) À l'aide des renseignements portés sur la figure, déterminer a et b.
2) Calculer $f'(x)$. En déduire les coordonnées du point A maximum de f

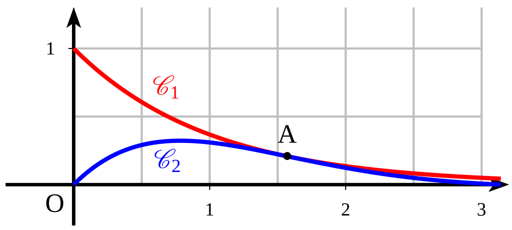


Exercice 12

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-contre les courbe $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentant les fonctions f_1 et f_2 définies sur $[0;\pi]$ par :

$$f_1(x) = e^{-x} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \sin x\, e^{-x}$$

Démontrer que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangentes en un point A.



Application en astronomie

Exercice 13

L'intensité $I(\lambda)$ du rayonnement d'une étoile pour une longueur d'onde λ ($\lambda > 0$), est donnée par : $I(\lambda) = \frac{1}{\lambda^5}\, e^{-\frac{K}{\lambda}}$ où K est une constante positive qui dépend de l'étoile.

Démontrer que l'intensité $I(\lambda)$ rayonnée par l'étoile est maximale pour une valeur λ_0 de λ que l'on déterminera en fonction de K. En déduire $I(\lambda_0)$.

Exercices de BAC

Exercice 14

Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $I = [0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{10x}{e^x+1}$

1) Démontrer que pour tout réel x de I, on a : $f'(x) = \dfrac{10}{(e^x+1)^2}\, g(x)$ où g est une fonction définie sur I que l'on déterminera.

2) Démontrer qu'il existe un unique réel α de I tel que $g(\alpha) = 0$. Donner de α un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
3) En déduire le tableau de variation de f et démontrer que $f(\alpha) = 10(\alpha - 1)$.
4) Construire la courbe $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormal pour $x \in [0;8]$.
   Unité graphique 1 cm.

Exercice 15

Amérique du sud novembre 2013

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x}$

1) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = e \times \dfrac{x}{e^x}$.
2) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
4) Déterminer la dérivée de la fonction f.
5) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

1) Vérifier que, pour tout réel x : $(1 - x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.
   On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.
2) Comparer les fonctions h_n et g'_n, g'_n étant la dérivée de la fonction g_n.
   En déduire que, pour tout réel $x \neq 1$: $h_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1}{(1 - x)^2}$.
3) Soit $S_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$, f étant la fonction définie dans la partie A.
   En utilisant les résultats de la **partie B**, déterminer une expression de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$. Vérifier cette limite par un algorithme.

Exercice 16

Pondichéry avril 2013 modifié

Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique ci-dessous représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.
On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + b\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure $0,1$ m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.
Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

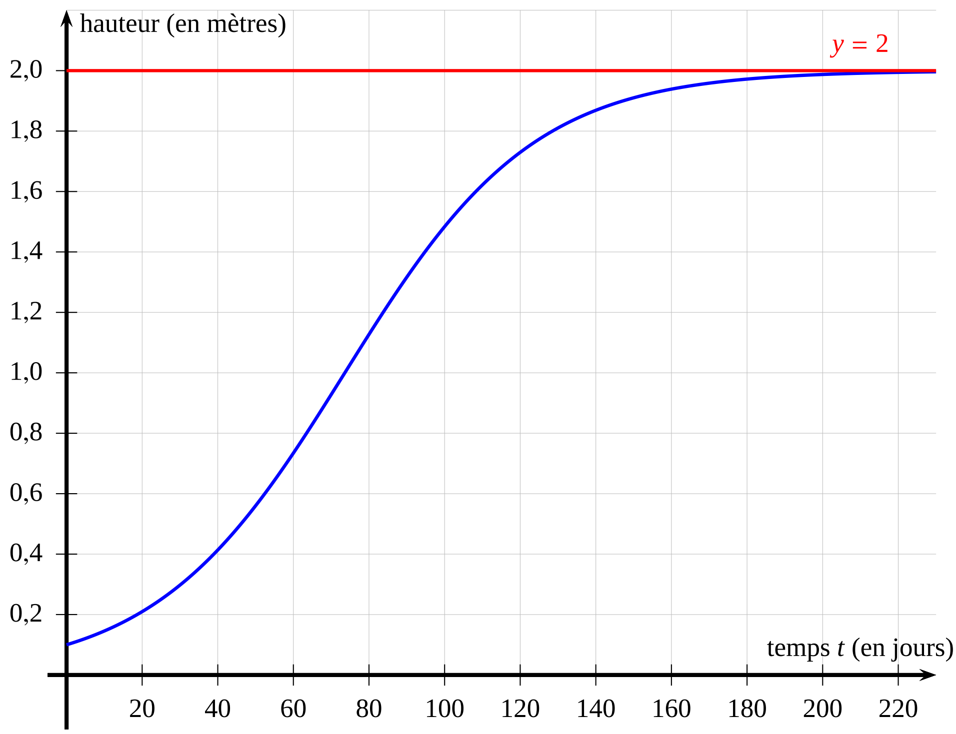
Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;\,250]$ par : $f(t) = \dfrac{2}{1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}}$

1) Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f). En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,250]$.
2) A l'aide d'un algorithme, donner, au jour près, le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à $1,5$ m.
3) On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f.

   La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t.

   En utilisant le graphique donné ci-dessous, déterminer une valeur approchée de celle-ci. Estimer alors la hauteur du plant.



Exercice 17

Asie juin 2014

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2a}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right)$$

où a est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction g.

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation

$$(\mathrm{E}\,):\quad (x-1)e^{2x}-1-x=0$$

Dans la suite, on définit sur $[0\,;\,+\infty[$ la fonction f par $f(x)=(x-1)e^{2x}-1-x$

1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
   Vérifier que $f'(0)=-2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$.
2) On note f'' la fonction dérivée de f'.
   Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f''(x)=4xe^{2x}$.
3) Montrer que, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0. À l'aide de l'algorithme par dichotomie donner un encadrement au centième de x_0. On pourra calculer $f'(1)$
4) a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f. Montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,x_0]$.
   b) Calculer $f(2)$.
   En déduire que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur. Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.

Exercice 18

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$

1) Dans un repère orthonormal, construire la courbe Γ d'équation $y=e^x$ et la droite d tangente à Γ en $x=0$.
2) Justifier graphiquement que, pour tout réel u : $e^u \geqslant u+1$
3) En déduire que pour tout réel x : $e^{-x}+x-1 \geqslant 0$ et $1+(x-1)e^x \geqslant 0$
4) Démontrer alors que la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Exercice 19

Antilles-Guyane juin 2014

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x)=x+1+\frac{x}{e^x}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

1) Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1-x+e^x$

   Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).
   En déduire le signe de $g(x)$.
2) Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.

3) On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}g(x)$

4) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.

6) a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

Exercice 20

Antilles-Guyane septembre 2014

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = xe^{-x}$.

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

On donne ci-après la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère du plan. La droite Δ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Placer sur le graphique donné ci-après, en utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ, les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. Laisser les tracés explicatifs apparents.

2) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

3) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

4) a) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers ℓ.
   b) Déterminer cette limite ℓ

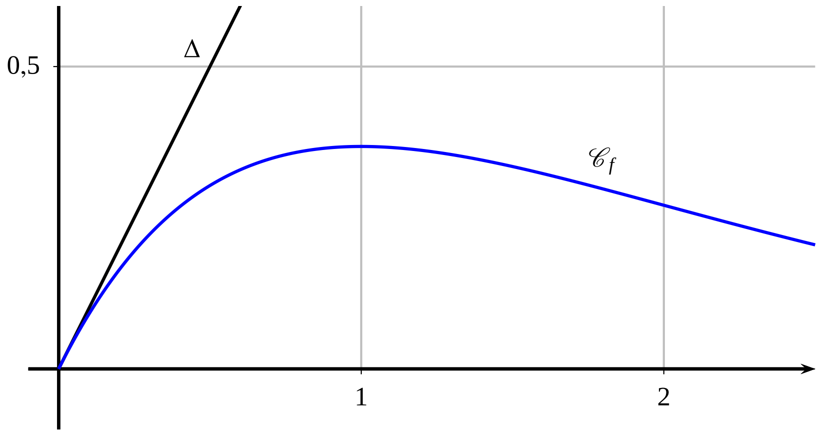
Partie C

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

Recopier puis compléter l'algorithme donné ci-contre afin qu'il calcule S_{100}. Donner alors S_{100} à 10^{-2} près

Variables : S, u réels
k entier
Entrées et initialisation
$\cdots \to u$
$\cdots \to S$
Traitement
pour k variant de 1 à … **faire**
$u \times e^{-u} \to u$
$\cdots \to S$
fin
Sorties : Afficher …



0,5
Δ
$\mathscr{C}_f$
1
2