Intégration et primitives

Table des matières

1 Notion d'intégrale

Le but de l'intégration est de calculer la surface délimitée par une courbe et l'axe des abscisses.

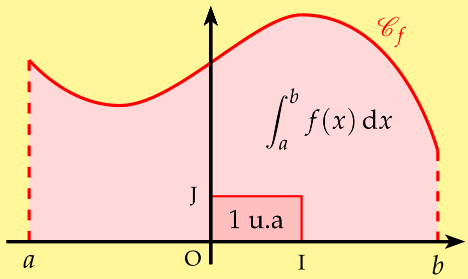
1.1 Définition

Définition 1 : Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a\,;b]$.

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

On appelle

- **Unité d'aire (u.a.)** : l'aire du rectangle bâti à partir des points O, I et J.
- **Domaine sous la courbe** : domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ $(a \leqslant b)$.
  Ce domaine est l'ensemble des point $M(x; y)$ du plan tels que :
  $$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$
- **Intégrale de f sur [a ;b]** : la mesure de l'aire en u.a. du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$.
  On la note : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

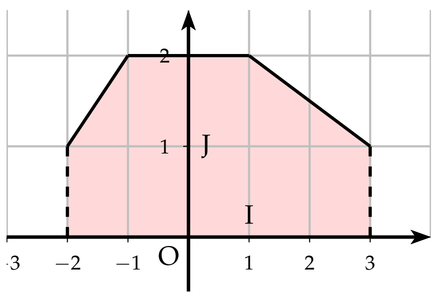


Remarque :

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se lit : « somme ou intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».
- La variable "x" est une variable muette, c'est à dire qu'elle n'est plus présente lorsque le calcul est effectué.
- La variable x peut être remplacée par : t, u, ou toute autre lettre à l'exception de a et b.

Exemple : On donne la représentation suivante d'une fonction f sur $[-2\,;3]$ ainsi que les mesures : OI = 2 cm et OJ = 3 cm. Calculer :

- L'unité d'aire.
- $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ puis l'aire en cm^2



L'unité d'aire vaut : $2 \times 3 = 6$ cm^2

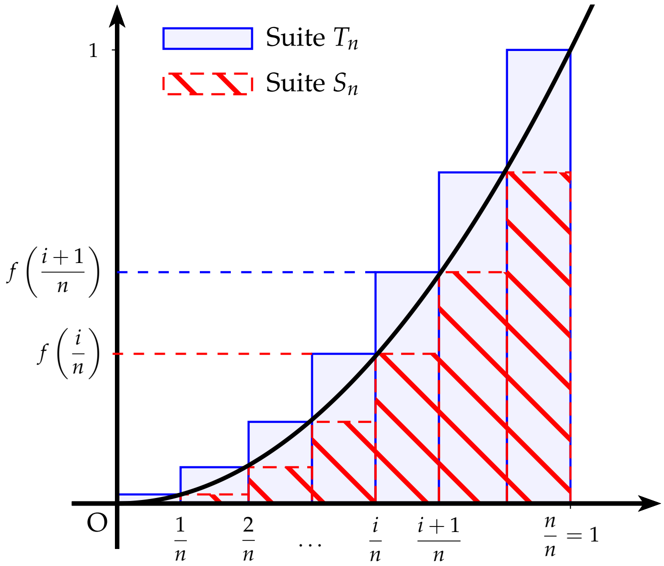
Pour calculer l'intégrale, il faut calculer l'aire sous la courbe en unité d'aire soit le nombre de rectangles. Il y a 7 rectangles pleins un demi rectangle en haut à gauche et un triangle en haut à droite de côté respectifs 2 et 1 soit $\frac{2\times 1}{2} = 1$ rectangle. On en déduit donc :

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 8,5 \quad \text{et} \quad \mathscr{A} = 8,5 \times 6 = 51 \text{ cm}^2$$

1.2 Exemple de calcul d'intégrale : la quadrature de la parabole

Le problème : Calculer l'intégrale de la fonction carrée f sur $[0;1]$.

Il s'agit donc de calculer l'aire $\mathscr{A}$ sous la parabole dans l'intervalle [0 ;1]. L'idée de Riemann est d'encadrer cette aire par deux séries de rectangles. On divise l'intervalle [0 ;1] en n parties. Sur chaque petit intervalle $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, on détermine la valeur minimale et maximale de la fonction carrée. Comme cette fonction est croissante sur [0 ;1], la valeur minimale est $f\left(\frac{i}{n}\right)$ et la valeur maximale $f\left(\frac{i+1}{n}\right)$. On obtient alors ces deux séries de rectangles comme la figure ci-dessous :



On définit deux suites avec $f(x) = x^2$:

- La suite (S_n) des rectangles hachurés dont l'aire est S_n :

$$S_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3}$$

- La suite (T_n) des rectangles bleus dont l'aire est T_n :

$$T_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = S_n + \frac{1}{n}$$

L'aire sous la courbe $\mathscr{A}$ vérifie donc : $S_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant T_n$

Algorithme : Calculer à l'aide d'un algorithme les valeurs de S_n et T_n lorsque $n = 5,\ 10,\ 20,\ 100,\ 1000$

Programme classique pour déterminer les termes d'une suite définie par une somme.

On obtient alors les résultats suivants à 10^{-4} près :

n	S	T
5	$0,2400$	$0,4400$
10	$0,2850$	$0,3850$
20	$0,3088$	$0,3588$
100	$0,3284$	$0,3384$
1000	$0,3328$	$0,3338$

Variables
N, I, S, T
Algorithme
Lire N
$0 \to S$
Pour I variant de 1 à $N-1$
  $S + \dfrac{I^2}{N^3} \to S$
FinPour
$S + \dfrac{1}{N} \to T$
Afficher S et T

On constate que les deux suites semblent converger vers la même limite : $S_{1000} \simeq T_{1000} \simeq 0,333$

Remarque : D'après le tableau de valeurs, on peut conjecturer que la suite (S_n) est croissante et la suite (T_n) est décroissante. De plus leur différence $T_n - S_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0. On dit alors que les suites sont adjacentes.

Démonstration : Montrons que ces deux suites convergent vers la même limite.
On peut montrer par récurrence que la somme des carrés est égale à :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

En appliquant cette formule à l'ordre $n-1$, on obtient :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n\,[2(n-1)+1]}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

En appliquant cette relation aux suites S_n et T_n, on obtient :

$$S_n = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

$$T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} = 0$$

On en déduit par addition : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{3}$

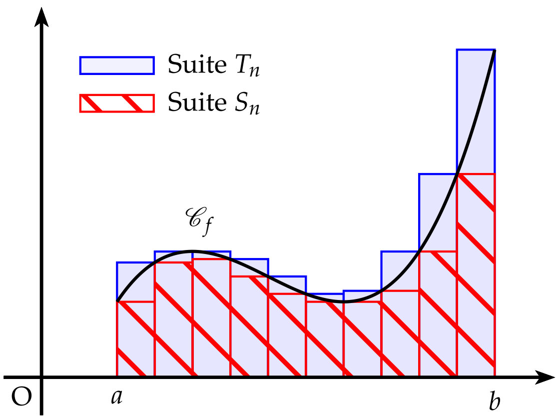
Comme les deux suites encadrent $\mathscr{A}$, on a : $\mathscr{A} = \dfrac{1}{3}$ u.a. et donc $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

Calculette TI 82 : Pour calculer la valeur exacte de cette intégrale faire (dans le menu math)

fonctIntégr($X^2, X, 0, 1$)$\triangleright$ Frac   on retrouve $1/3$

1.3 Intégrale d'une fonction continue positive

On généralise cet encadrement à une fonction f quelconque continue et positive. On divise l'intervalle $[a;b]$ en n parties égales. Sur chaque petit intervalle, on détermine la valeur minimale et maximale de la fonction f. L'aire sous la courbe est alors encadrée par deux suites correspondantes à l'aire des rectangles hachurée et l'aire des rectangles bleus. Ces deux suites convergent vers la même limite qui correspond à l'intégrale de f sur $[a;b]$ (théorème admis) comme le montre la figure ci-dessous.



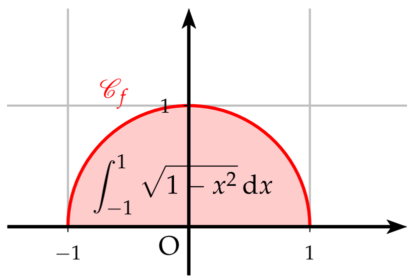
Les suites (S_n) et (T_n) convergent vers une même limite $\mathscr{A}$

On a donc : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathscr{A}$

Remarque : Le symbole $\mathrm{d}x$ dans l'intégrale est une notation différentielle qui symbolise une très petite distance et représente la largeur de chaque petit rectangle. $f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire d'un rectangle et le symbole $\int$ devant signifie que l'on fait la somme des aires de chaque petit rectangle.

Exemple : Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Le cercle de centre O et de rayon 1 a pour équation : $x^2+y^2=1$. On en déduit alors que le demi-cercle de centre O et de rayon 1 pour $y \geqslant 0$ a pour équation $y = \sqrt{1-x^2}$. On en déduit que l'intégrale est l'aire du demi-disque de rayon 1 soit $\dfrac{\pi}{2}$.



$$\text{Conclusion : } \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

1.4 Définition cinématique de l'intégrale

On a donné jusqu'ici une définition géométrique de l'intégrale, on peut aussi donner une définition cinématique de l'intégrale.

Pour un mobile se déplaçant sur une trajectoire à la vitesse $v(t)$ positive ou nulle, la distance d parcourue par le mobile entre les instants t_1 et t_2 s'exprime par :

$$d = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$$

2 Primitive

2.1 Théorème fondamental

Théorème 1 : Soit une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

La fonction F définie par : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a; b]$ et $F' = f$

ROC

Démonstration : Dans le cas où f est croissante sur $[a; b]$ (On admet ce théorème dans le cas général).

On revient à la définition de la dérivée, il faut montrer que si $x_0 \in [a; b]$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

- **1^{er} cas** : $h > 0$, on a :

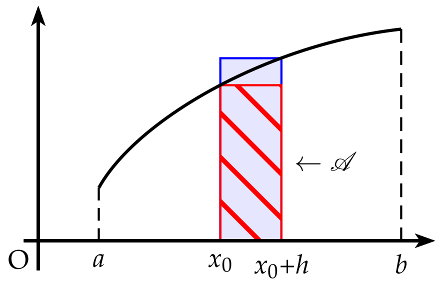
  $F(x_0 + h) - F(x_0) = \displaystyle\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathscr{A}$

  (par soustraction d'aire).

  On sait que f est croissante sur $[a; b]$, donc si $t \in [x_0; x_0 + h]$, on a :

  $f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0 + h)$

  donc en encadrant l'aire $\mathscr{A}$ par le rectangle minorant (hachuré) et le rectangle majorant (bleu) l'aire (en bleu), on a :



$$f(x_0) \times h \leqslant \mathscr{A} \leqslant f(x_0 + h) \times h$$

$$f(x_0) \leqslant \frac{\mathscr{A}}{h} \leqslant f(x_0 + h)$$

$$f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h)$$

- **2^e cas** : $h < 0$, on montre de même que : $f(x_0 + h) \leqslant \dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$

- **Conclusion** : on sait que f est continue sur $[a; b]$, donc $\displaystyle\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$

  D'après le théorème des gendarmes, on a : $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$

2.2 Définition

Définition 2 : f est une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f admet une primitive sur I si, et seulement si, il existe une fonction F dérivable sur I telle que :

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad F'(x) = f(x)$$

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$. Déterminer une primitive de f.

   F dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $F(x) = x^2$ est une primitive de f car :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = 2x$$

2) Montrer que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = x(\ln x - 1)$ est une primitive de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.

   F est dérivable sur $]0;+\infty[$ car somme et produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$. On a :

$$F'(x) = \ln x - 1 + x \times \frac{1}{x} = \ln x$$

   F est donc une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Théorème 2 : Soit une fonction f admettant une primitive F sur I, alors toute primitive G de f est de la forme :

$$\forall x \in I \quad G(x) = F(x) + k \quad k \in \mathbb{R}$$

Démonstration : Soit la fonction G une fonction définie sur I par :

$$G(x) = F(x) + k$$

G est manifestement dérivable sur I car somme de fonctions dérivables sur I.
On a :

$$G'(x) = F'(x) = f(x)$$

G est donc une primitive de f sur I.

Réciproquement si G est une primitive de f sur I, alors on a :

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad (F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Si la dérivée de $(F-G)$ est nulle alors $(F-G)$ est une fonction constante. Donc :

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad G(x) = F(x) + k \quad k \in \mathbb{R}$$

Exemple : Si la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2$ est une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ alors la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x^2 + 3$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2.3 Primitive vérifiant une condition initiale

Théorème 3 : Soit f une fonction admettant une primitive sur un intervalle I.
Soit $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f sur I tel que :

$$F(x_0) = y_0$$

Démonstration : Soit F et G deux primitives de f sur I. On a donc :

$$F(x) = G(x) + k$$

si on impose $F(x_0) = y_0$ alors il existe un unique k tel que $k = y_0 - G(x_0)$

Exemple : Déterminer la primitive F de $f(x) = 2x$ tel que $F(2) = 3$.

F est une primitive de f donc : $F(x) = x^2 + k$

$F(2) = 4 + k$ alors $k = F(2) - 4 = 3 - 4 = -1$ donc $F(x) = x^2 - 1$.

2.4 Existence de primitives

Théorème 4 : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

ROC

Démonstration : Uniquement dans le cas où la fonction f est continue sur un intervalle fermé $[a;b]$. f admet donc un minimum m. On considère la fonction g telle que : $g(x) = f(x) - m$

g est continue (car somme de fonctions continues) et positive sur $[a;b]$. D'après le théorème fondamental, la fonction G définie ci-dessous est une primitive de g sur $[a;b]$.

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction F définie sur $[a;b]$ par : $F(x) = G(x) + mx$ est alors une primitive de f car :

$$F'(x) = G'(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$$

Remarque : On admet ce théorème dans le cas général.

$\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a

2.5 Primitive des fonctions élémentaires

Par lecture inverse du tableau des dérivées, on obtient le tableau des primitives suivantes en prenant comme constante d'intégration $k = 0$:

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad n \neq 1$	$F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

Exemples : Quelques exemples d'application du tableau :

1) Sur $\mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ alors $F(x) = \dfrac{x^5}{5}$

2) Sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ alors $F(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$

On pourrait aussi considérer que $f(x) = x^{-3}$, en appliquant la formule de la fonction puissance, on obtiendrait : $F(x) = \dfrac{x^{-2}}{-2} = -\dfrac{1}{2x^2}$

2.6 Règles d'intégrations

D'après les règles de dérivation, on déduit les règles suivantes en prenant comme constante d'intégration $k = 0$:

Primitive de la somme	$\int (u+v) = \int u + \int v$
Primitive du produit par un scalaire	$\int (au) = a \int u$
Primitive de $u'u^n$	$\int u'u^n = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
Primitive de $\dfrac{u'}{u}$	$\int \dfrac{u'}{u} = \ln \lvert u \rvert$
Primitive de $\dfrac{u'}{u^n}$ $n \neq 1$	$\int \dfrac{u'}{u^n} = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
Primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$\int \dfrac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$
Primitive de $u'e^u$	$\int u'e^u = e^u$
Primitive de $u(ax+b)$	$\int u(ax+b) = \dfrac{1}{a}U(ax+b)$

2.7 Exemples de calcul de primitives

⚠ Bien adapter le coefficient lorsque cela est nécessaire pour obtenir une forme donnée

Polynôme : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, alors $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + 2x^2 - x$

Forme u'u^n : $f(x) = 2x(x^2-1)^3$, alors $F(x) = \dfrac{(x^2-1)^4}{4}$

$$f(x) = (3x-1)^4 = \frac{1}{3}\left[3(3x-1)^4\right], \quad \text{alors} \quad F(x) = \frac{1}{3}\frac{(3x-1)^5}{5} = \frac{(3x-1)^5}{15}$$

Forme $\frac{\mathbf{u}'}{\mathbf{u}}$: $f(x) = \dfrac{2}{2x-3}$, alors $F(x) = \ln|2x-3|$

$$f(x) = \frac{1}{4x+1} = \frac{1}{4}\left[\frac{4}{4x+1}\right], \quad \text{alors} \quad F(x) = \frac{1}{4}\ln|4x+1|$$

Forme $\frac{\mathbf{u}'}{\mathbf{u}^n}$: $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x-3)^2} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}\right]$, alors

$$F(x) = \frac{-1}{2(x^2+2x-3)}$$

Forme $\frac{\mathbf{u}'}{\sqrt{\mathbf{u}}}$: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$ alors $F(x) = 2\sqrt{x+4}$

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{2x+1}}\right], \quad \text{alors} \quad F(x) = \frac{3}{2}\times 2\sqrt{2x+1} = 3\sqrt{2x+1}$$

Forme $\mathbf{u}'\mathbf{e}^{\mathbf{u}}$: $f(x) = e^{4x+1} = \dfrac{1}{4}\left[4e^{4x+1}\right]$, alors $F(x) = \dfrac{1}{4}e^{4x+1}$

$$f(x) = xe^{-x^2+3} = -\frac{1}{2}\left[-2xe^{-x^2+3}\right], \quad \text{alors} \quad F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2+3}$$

Remarque : Trouver une primitive n'est pas toujours chose facile. Des manipulations plus sophistiquées (par exemple pour les fonctions rationnelles ou les fonctions possédant des radicaux) sont parfois necessaires pour déterminer une primitive (cf compléments sur l'intégration). Parfois la primitive ne correspond à aucune fonction connue, elle est alors uniquement définie par une intégrale (par exemple la primitive de e^{-x^2})

Contrairement à la dérivation qui est toujours possible, la recherche de primitive s'avère donc parfois impossible ! !

3 Intégrale d'une fonction continue

3.1 Calcul à partir d'une primitive

⚠ On étend la validité du théorème fondamental aux fonctions continues de signes quelconques.

Théorème 5 : f est une fonction continue sur un intervalle I. F est une primitive quelconque de f sur I, alors pour tous réels a et b de I on a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Démonstration : Si la fonction f est continue sur I alors f admet une primitive G sur I qui s'annule en a. On a alors pour tous réels a et b de I :

$$G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad \text{on a alors :} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = G(b)$$

Soit F une primitive quelconque de f sur I, alors il existe un réel k tel que :

$$F(x) = G(x) + k$$

On obtient alors : $F(a) = k$ et $G(b) = F(b) - k = F(b) - F(a)$.

Conclusion : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Exemples :

1) Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x^2 - 4x + 3)\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} (x^2 - 4x + 3)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_{-1}^{2} \\ &= \left(\frac{8}{3} - 2\times 4 + 3\times 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - 2 - 3\right) \\ &= \frac{8}{3} - 8 + 6 + \frac{1}{3} + 2 + 3 = 6\end{aligned}$$

2) Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$

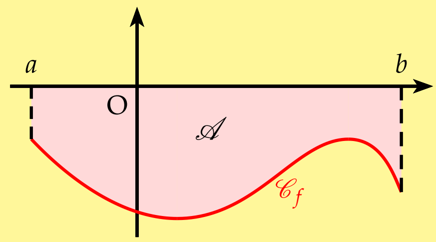
$$\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{x^2+1}\right]_0^2 = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{5} + 1\right) = \frac{6}{5}$$

3.2 Intégrale et aire

Propriété 1 : Relation entre aire et intégrale

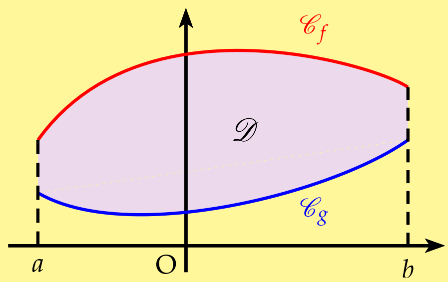
- Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ telle que $f \leqslant 0$. Soit $\mathscr{A}$ l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$. On a alors :

$$\mathscr{A} = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



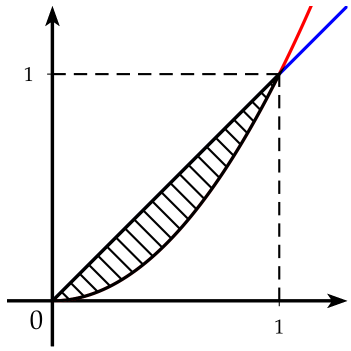
- Soient deux fonctions f et g continues sur $[a;b]$ telles que $f \geqslant g$. Soit $\mathscr{D}$ l'aire comprise entre les deux courbes et les droites $x = a$ et $x = b$. On a alors :

$$\mathscr{D} = \int_a^b (f - g)(x)\,\mathrm{d}x$$



Démonstration : La première propriété se montre facilement par symétrie avec l'axe des abscisses.
La deuxième propriété est directement liée à la soustraction de deux aires.

Exemple : Trouver l'aire comprise entre la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite $y = x$ entre les abscisses $x = 0$ et $x = 1$



On a alors comme la parabole est en dessous de la droite :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

3.3 Propriétés algébriques de l'intégrale

Propriété 2 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I alors :

1) $\forall a \in \mathrm{I}$ on a : $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

2) $\forall a, b \in \mathrm{I}$ on a : $\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

3) **Relation de Chasles**

$\forall a, b, c \in \mathrm{I}$ on a : $\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$

Démonstration : Ces propriétés découlent immédiatement du calcul à partir de la primitive F de f. Par exemple pour la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque :

- Si une fonction est paire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

- Si une fonction est impaire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

Théorème 6 : Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b, alors pour tous les réels α et β, on a :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration : idem, cela découle immédiatement des primitives F et G des fonction f et g.

Exemple : f et g sont deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que :

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 (5f-3g)(x)\mathrm{d}x = 5\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 3\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

3.4 Intégrales et inégalités

Théorème 7 : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.

1) **Positivité**

   Si $f \geqslant 0$ sur $[a;b]$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$

2) **Intégration d'une inégalité**

   Si $f \geqslant g$ sur $[a;b]$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

3) **Inégalité de la moyenne**

   Si $\forall x \in [a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$

Démonstration :

1) Immédiat car si la fonction est positive sur $[a,b]$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ représente l'aire sous la courbe, donc la quantité est positive.

2) Si $f \geqslant g$ alors on a : $f-g \geqslant 0$ donc d'après le 1), on a : $\displaystyle\int_a^b (f-g)(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.
   D'après la linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_a^b (f-g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

   On en déduit donc que $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

3) De l'encadrement de la fonction f, d'après le 2), on en déduit :

$$\begin{aligned}
m \leqslant & f(x) \leqslant M \\
\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant & \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x \\
\Big[mx\Big]_a^b \leqslant & \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \Big[Mx\Big]_a^b \\
m(b-a) \leqslant & \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)
\end{aligned}$$

Exemple : Encadrement de l'intégrale suivante : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

On encadre la fonction f sur $[1;9]$:

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant x \leqslant 9 \\ 1 &\leqslant \sqrt{x} \leqslant 3 \\ 2 &\leqslant 1+\sqrt{x} \leqslant 4 \\ \frac{1}{4} &\leqslant \frac{1}{1+\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On applique ensuite l'inégalité de la moyenne :

$$\frac{1}{4}(9-1) \leqslant \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}(9-1)$$

$$2 \leqslant \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leqslant 4$$

$$2 \leqslant \mathrm{I} \leqslant 4$$

3.5 Valeur moyenne

Théorème 8 : Soit une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$. **La valeur moyenne** de la fonction f sur $[a;b]$ est le réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque :

- Cette définition est la généralisation de la moyenne d'une série statistique : $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$
- **Cinématique**. On peut donc donner la définition de la vitesse moyenne V d'un mobile entre les instants t_1 et t_2 dont la vitesse instantanée est $v(t)$:

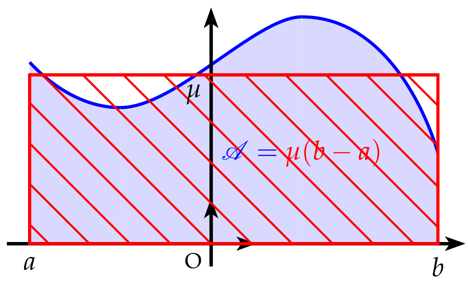
$$V = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$$

Interprétation graphique :

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$, On a alors :

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\ &= \mu(b-a) \end{aligned}$$

L'aire $\mathscr{A}$ est égale à l'aire du rectangle rouge sur la figure ci-contre



Exemple : Calculer la valeur moyenne μ de la fonction sinus sur $[0;\pi]$.

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(1+1) = \frac{2}{\pi}$$

4 Calcul du volume d'un solide

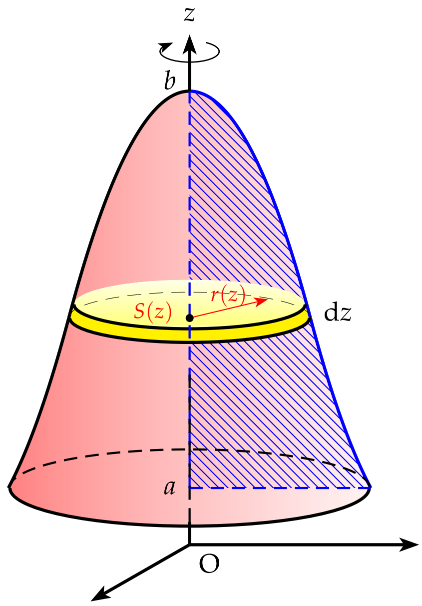
4.1 Présentation d'une méthode de calcul

Une méthode pour déterminer le volume d'un solide, consiste à découper celui-ci par des plans parallèles. On intègre ensuite les surfaces obtenues par ce découpage suivant l'axe normal à ces plans.

On s'intéressera uniquement au volume de solide de révolution.

Solide de révolution : solide engendrée par une surface de révolution

Surface de révolution : surface engendrée par une courbe (directrice) tournant autour d'un axe.



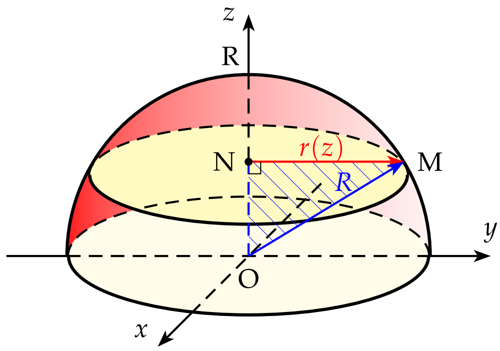
Si l'axe (Oz) est l'axe de révolution, le volume V du solide de révolution est égal à :

$$\mathrm{V} = \int_a^b S(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \pi\, r^2(z)\,\mathrm{d}z$$

4.2 Calcul du volume d'une sphère

Compte tenu de la symétrie de la sphère, on calcule le volume d'une demi-sphère qu'on multipliera ensuite par 2.
On découpe ainsi la demi-sphère avec des plan perpendiculaires à l'axe (Oz). Les surfaces obtenues sont alors des cercles de rayon $r(z)$. La surface de ces cercles $S(z)$ vaut :

$$S(z) = \pi\, r^2(z)$$



Il reste donc à déterminer le rayon $r(z)$ en fonction de z à l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle OMN rectangle en $\mathrm{N}(0,0,z)$:

$$r^2(z) = R^2 - z^2$$

On obtient alors le demi volume de la sphère :

$$\frac{1}{2}V = \int_0^R S(z)\mathrm{d}z = \int_0^R \pi(R^2 - z^2)\mathrm{d}z = \pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^R = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi R^3$$

On en déduit alors le volume de la sphère que tout le monde a appris : $\mathrm{V} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

4.3 Volume d'un cône

On découpe le cône d'axe (Oz) avec des plans perpendiculaires à l'axe (Oz). Les surfaces obtenues sont alors des cercles de rayon $r(z)$.
Il reste donc à déterminer le rayon $r(z)$ en fonction de z à l'aide du théorème de Thalès dans les triangles : OBB′ et OAA′, on a avec $\mathrm{A}(0,0,z)$:

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{BB'}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{z}{h} = \frac{r(z)}{R} \quad\Leftrightarrow\quad r(z) = \frac{Rz}{h}$$

On obtient ainsi le volume du cône :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi\, r^2(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^h \pi \frac{R^2 z^2}{h^2}\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^2 \mathrm{d}z = \frac{\pi R^2}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h \\ &= \frac{\pi R^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi R^2 h \end{aligned}$$

On retrouve ainsi le volume du cône que tout le monde connaît : $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$