# Suite définie par une intégrale

## EXERCICE 1

La suite $(I_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \int_0^1 (1+t^n)\, dt$

1) Prouver que la suite $(I_n)$ est décroissante.
2) Est-elle convergente ?

## EXERCICE 2

Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose : $I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx$

1) Démontrer que $\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n}$
2) La suite $(I_n)$ est-elle convergente ?
3) On pose pour tout entier naturel non nul : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.
   Montrer que la suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.

## EXERCICE 3

**Centres étrangers juin 2012**

On considère la suite $(I_n)$ définie pour $n$ entier naturel non nul par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2}\, dx$

1) a) Calculer la valeur de $I_1$.
   b) On admet que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2} I_n$
   Calculer $I_3$ et $I_5$.
2) On considère l'algorithme suivant :

   Quel terme de la suite $(I_n)$ obtient-on en sortie de cet algorithme ? Quelle est sa valeur ?

**Variables :** $n$ entier, $u$ réel
**Entrées et initialisation**
  $1 \to n$
  $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2} \to u$
**Traitement**
  **tant que** $n < 21$ **faire**
    $\frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}u \to u$
    $n+2 \to n$
  **fin**
**Sorties :** Afficher $u$

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, $I_n \geqslant 0$.
   b) Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante.
   c) En déduire que la suite $(I_n)$ est convergente. On note $\ell$ sa limite.
4) Déterminer la valeur de $\ell$. On pourra raisonner par l'absurde.

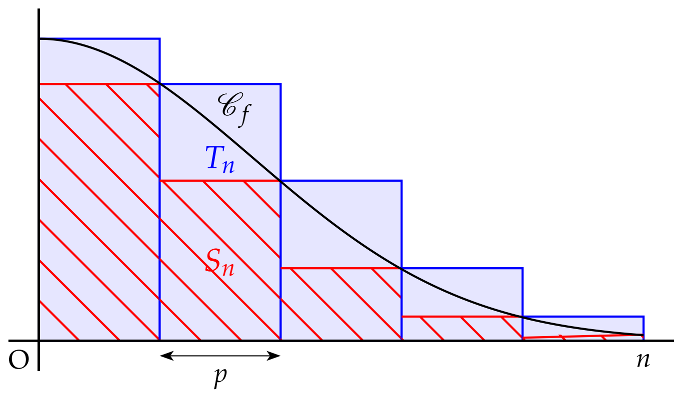
## EXERCICE 4

**Métropole septembre 2017 (extrait)**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $u_n = \displaystyle\int_0^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
On ne cherchera pas à calculer $u_n$ en fonction de $n$.

1) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
2) Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1}$.
   En déduire que pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n < \dfrac{e}{2}$.
3) Que peut-on dire sur la convergence de la suite $(u_n)$ ?
4) On admet que la suite est convergente vers $\ell$. On voudrait connaître une valeur approchée de $\ell$.
   Pour cela on découpe l'aire sous la courbe de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = e^{-x^2}$ en bande de largeur $p$ donné sur l'intervalle $[0; n]$, $n$ étant donné. On obtient deux séries de rectangles d'aires respectives $S_n$ et $T_n$. $S_n$ étant l'aire des rectangles inférieurs à $(u_n)$ et $T_n$ l'aire supérieur comme le montre la figure suivante. On donne le programme suivant :

**Entrées et initialisation**
  Saisir $N$, $P$
  Affecter à $S$ la valeur ...
  Affecter à $T$ la valeur ...
**Traitement**
  **pour** $I$ variant de 0 à ... **faire**
    Affecter à $S$ la valeur ...
    Affecter à $T$ la valeur ...
  **fin**
**Sorties :** Afficher $S$,$T$




   Déterminer un encadrement de $\ell$ en prenant $n = 5$ et $p = 0.01$. Comparer cet encadrement à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

## EXERCICE 5

**Liban mai 2015**

On définit la suite $(u_n)$ de la façon suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$

1) Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
   b) En déduire la valeur exacte de $u_1$.
3) a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang $n$ de la suite $(u_n)$ où $n$ est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

**Variables :** $i$, $n$ entiers naturels
$u$ : réel
**Entrées et initialisation**
Saisir $n$
Affecter à $u$ la valeur ...
**Traitement**
**pour** $i$ variant de 1 à ... **faire**
Affecter à $u$ la valeur ......
**fin**
**Sorties :** Afficher $u$

b) Rentrer cet algorithme dans votre calculatrice et compléter le tableau de valeurs suivant :

| $n$ | 0 | 1 | 5 | 10 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 0,693 1 | 0,306 9 | | | | |

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite $(u_n)$ peut-on émettre ?

4) a) Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.
b) Démontrer que la suite $(u_n)$ est convergente.

5) On appelle $\ell$ la limite de la suite $(u_n)$. Démontrer que $\ell = 0$.

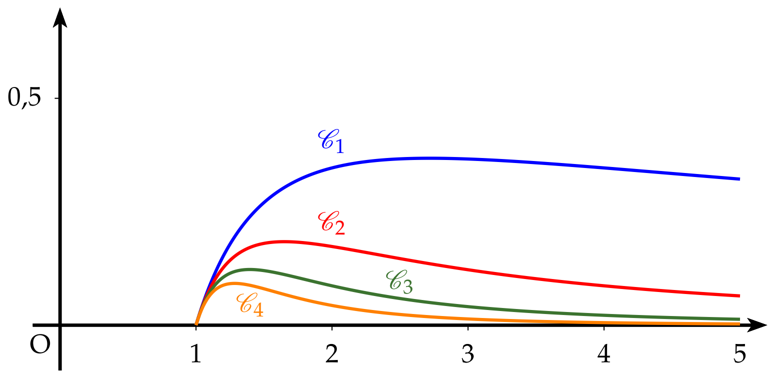
## EXERCICE 6

**Liban mai 2018**

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions $f_n$ définies sur $[1\,;5]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$$

Pour tout $n > 0$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe de la fonction $f_n$ dans un repère orthogonal.
Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathscr{C}_n$ pour $n \in \{1\,;2\,;3\,;4\}$.




1) Conjecturer la limite de l'aire délimitée par $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = 5$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

2) a) Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel $x$ de l'intervalle $[1\,;5]$ :

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln 5}{x^n}$$

b) Montrer que pour tout entier $n > 1$ : $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$.

c) Démontrer la conjecture de la question 1.

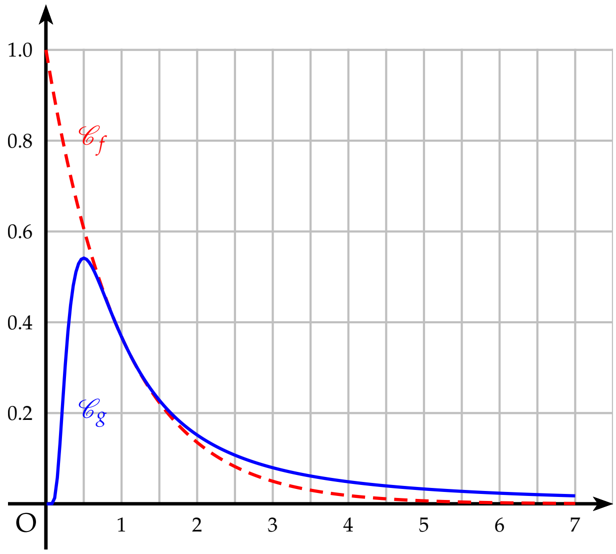
## EXERCICE 7

**Nouvelle Calédonie 2018 (extrait)**

On donne deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}}$$

On donne également les représentations des fonctions $f$ et $g$ :




**Partie A – Conjectures graphiques**

*Dans chacune des questions de cette partie, aucune explication n'est demandée.*

1) Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
2) Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $g'(x) = 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

**Partie B – Étude de la fonction $g$**

1) Calculer la limite de $g(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.
2) On admet que la fonction $g$ est strictement positive sur $]0\,;\infty[$.
   Soit $h$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \ln g(x)$.
   a) Démontrer que, pour tout nombre réel $x$ strictement positif, $h(x) = \dfrac{-1 - 2x\ln x}{x}$.
   b) Calculer la limite de $h(x)$ quand $x$ tend vers 0.
   c) En déduire la limite de $g(x)$ quand $x$ tend vers 0.
3) Démontrer que, pour tout nombre réel $x$ strictement positif, $g'(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}(1-2x)}{x^4}$.
4) En déduire les variations de la fonction $g$ sur $]0\,;+\infty[$.

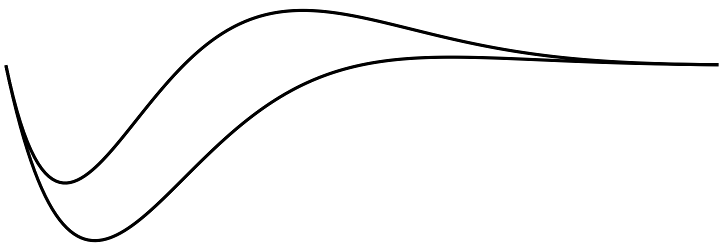
**Partie C – Aire des deux domaines compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$**

1) Démontrer que le point $\mathrm{A}(1\,;\,e^{-1})$ est un point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
   On admet que ce point est l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ et en dessous sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.
2) $a, b \in ]0\,;+\infty[$. Démontrer que $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = e^{-a} + e^{-\frac{1}{a}} - e^{-b} - e^{-\frac{1}{b}}$.
3) Démontrer que : $\displaystyle\lim_{a\to 0} \int_a^1 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 1 - 2e^{-1}$.
4) On admet que : $\displaystyle\lim_{a\to 0} \int_a^1 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$.
   Interpréter graphiquement cette égalité.

## EXERCICE 8

**Antilles-Guyane 2018**

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -e^{-x}\cos x.$$

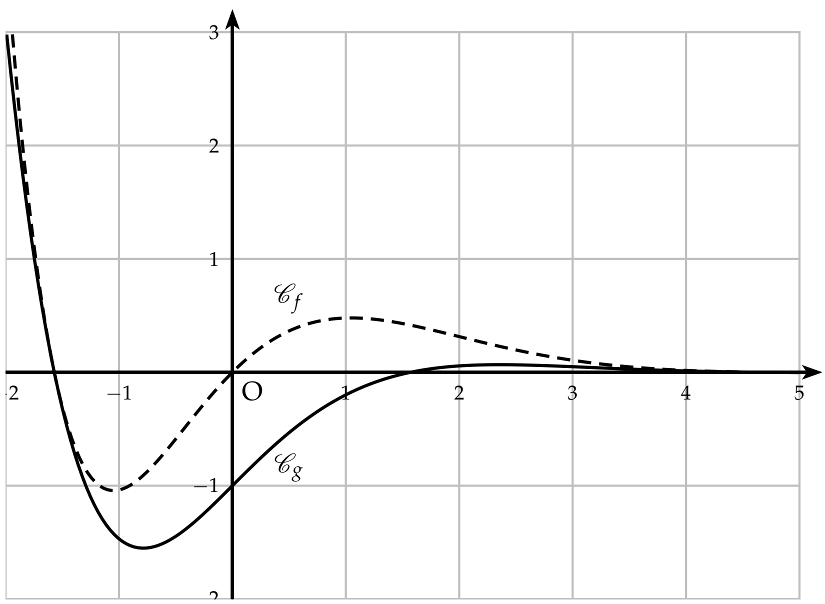
On admet que les fonctions $f$ et $g$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

**Partie A – Étude de la fonction $f$**

1) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\,e^{-x}$.
2) En déduire la limite de $f$ en $+\infty$.
3) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}(2\cos x - 1)$.
4) Dans cette question, on étudie la fonction $f$ sur l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$.
   a) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x$ appartenant à l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$.
   b) En déduire les variations de $f$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$.

**Partie B – Aire du logo**

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions $f$ et $g$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées ci-dessous.




1) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $H$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = \left(-\dfrac{\cos x}{2} - \dfrac{\sin x}{2} - 1\right) e^{-x}$.

On admet que $H$ est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1)\, e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_g$ est les droites d'équation $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

a) Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique.

b) Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$, puis en donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près en cm$^2$.

## EXERCICE 9

**Valeur moyenne**

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel. On réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone ($CO_2$) à débit constant. Dans ce qui suit, $t$ est le temps exprimé en minute.
À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de $CO_2$ contenu dans le local au bout de $t$ minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où $f$ est la fonction définie pour $t \in [0\,;\,20]$ par :

$$f(t) = (0,8t + 0,2)e^{-0,5t} + 0,03.$$

On donne le tableau de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0; 20]$.

$f(0) = 0,23$ traduit le fait que le taux de $CO_2$ à l'instant 0 est égal à 23 %.

| $t$ | 0 | | 1,75 | | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | + | 0 | − | |
| $f$ | 0,23 | ↗ | | ↘ | |

1) Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.
 a) Calculer $f(20)$.
 b) Déterminer le taux maximal de $CO_2$ pendant l'expérience.
2) On veut que le taux de $CO_2$ retrouve une valeur $V$ inférieure ou égale à 3,5 %.
 a) Justifier qu'il existe un unique instant $T$ satisfaisant cette condition.
 b) On considère l'algorithme suivant :
 Quelle est la valeur de la variable $t$ à la fin de l'algorithme ?
 Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?

```
Entrées et initialisation
    t ← 1,75
    p ← 0,1
    V ← 0,7
Traitement
    tant que V > 0,035 faire
        t ← t + p
        V ← f(t)
    fin
```

3) On désigne par $V_m$ le taux moyen ( en pourcentage) de $CO_2$ présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.
 a) Soit $F$ définie sur $[0; 11]$ par : $F(t) = (-1,6t - 3,6)e^{-0,5t} + 0,03t$
 Montrer que la fonction $F$ est une primitive de la fonction $f$ sur $[0; 11]$.
 b) En déduire le taux moyen $V_m$, valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0; 11]$. Arrondir le résultat au millième, soit à 0,1 %.