Les nombres complexes

Aspect géométrique

EXERCICE 1

1) D est le point de coordonnées $(\sqrt{3}; 3)$. Quel est son affixe ?
2) On donne les points A, B, C d'affixes respectives :
$$z_A = \sqrt{3} + i\ , \quad z_B = -\sqrt{3} - i\ , \quad z_C = 2i$$
Calculer le module et un argument pour ces trois affixes. Que peut-on déduire pour les points A, B et C.
3) Placer les points A, B, C et D à la règle et au compas.
4) Quelle est la nature du quadrilatère AOCD. Pourquoi ?
5) Quel est l'affixe du point E tel que ODEB soit un parallélogramme ?

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des point M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée.

1) $|z| = 3$ 2) $\text{Re}(z) = -2$ 3) $\text{Im}(z) = 1$

Opération dans $\mathbb{C}$

EXERCICE 3

Donner la forme algébrique des complexes suivant :

1) $z = 3 + 2i - 1 + 3i$
2) $z = 6 + i - (2 + 4i)$
3) $z = 12 - 3i - 4 - 5 + 8i$
4) $z = (1 + 2i)(4 + 3i)$
5) $z = (3 - i)(2 + 7i)$
6) $z = (1 + i)^2$
7) $z = (3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})$
8) $z = (2 - 5i)^2$
9) $z = (1 + i)(2 - 3i)(1 + i)$
10) $z = (2 + i)^2(1 - 2i)$

EXERCICE 4

Donner la forme algébrique des complexes suivants en rendant réel le dénominateur :

1) $z = \dfrac{1}{1 - i}$
2) $z = \dfrac{1}{2 - i\sqrt{3}}$
3) $z = \dfrac{1}{4 - 3i}$
4) $z = \dfrac{4 - 6i}{3 + 2i}$
5) $z = \dfrac{5 + 15i}{1 + 2i}$
6) $z = \dfrac{1 + 2i}{1 - 2i}$
7) $z = \dfrac{3 - 6i}{3 + i} + \dfrac{4}{3 - i}$
8) $z = \left(\dfrac{4 - 6i}{2 - 3i}\right)\left(\dfrac{1 + 3i}{3 + 2i}\right)$

Résolution d'équation du 1er degré dans $\mathbb{C}$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. Donner la solution sous forme algébrique.

1) $(1+i)z = 3 - i$
2) $2z + 1 - i = iz + 2$
3) $(2z + 1 - i)(iz + 3) = 0$
4) $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$
5) $(iz + 1)(z + 3i)(z - 1 + 4i) = 0$

Exercice 6

Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^2$:

1) $\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ -z + z' = 1 - 2i \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} z - z' = i \\ iz + z' = 1 \end{cases}$

Complexe conjugué

Exercice 7

Donner la forme algébrique du conjugué $\bar{z}$ des complexes suivants : z

1) $z = 3 - 4i$
2) $z = \dfrac{1}{i-1}$
3) $z = \dfrac{3-i}{1+i}$
4) $z = \dfrac{2i+1}{i+2} + \dfrac{1-2i}{2-i}$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z suivantes :

1) $2\bar{z} = i - 1$
2) $(2z + 1 - i)(i\,\bar{z} + i - 2) = 0$
3) $\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = i$

Exercice 9

Soit $z = x + iy$ avec x et y réels ; on note Z le nombre complexe : $Z = z - 2\bar{z} + 2$.

1) Calculer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z = 0$ d'inconnue z.

Exercice 10

Soit $z = x + iy$ avec x et y réels.
À tout complexe z, on associe $Z = 2\,\bar{z} - 2 + 6i$.

1) Calculer en fonction de x et de y, les parties réelle et imaginaire de Z.
2) Existe-t-il des complexes z tels que $Z = z$?

Exercice 11

Dans le plan complexe, M est point d'affixe $z = x + iy$, x et y réels. À tout complexe z, $z \neq 1$, on associe : $z' = \dfrac{5z - 2}{z - 1}$

1) Exprimer $z' + \overline{z'}$ en fonction de z et $\bar{z}$.
2) Démontrer que « z' est un imaginaire pur » est équivaut à « M est un point d'un cercle privé d'un point ».

Exercice 12

Pour tout complexe z différent de i, on pose : $z' = \dfrac{iz - 1}{z - i}$. Prouver que :

$$z' \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad |z| = 1$$

Vrai-Faux

Exercice 13

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple.

1) Si $z + \bar{z} = 0$, alors $z = 0$.
2) Si $z + \dfrac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.
3) Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

Équations du second degré

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{C}$, chacune des équations suivantes.

1) $2z^2 - 6z + 5 = 0$
2) $z^2 - 5z + 9 = 0$
3) $z^2 - 2z + 3 = 0$
4) $z^2 = z + 1$
5) $z^2 + 3 = 0$
6) $z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0$

Exercice 15

θ est un réel donné

1) Résoudre l'équation (E) : $z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0$
2) Dans le plan complexe $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, A et B sont les point ayant pour affixe les solutions de l'équation (E). Quelles sont les valeurs de θ pour lesquelles le triangle OAB est équilatéral ?

Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant : $\begin{cases} z_1 z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases}$

Exercice 17

Trouver le complexe p et q tels que l'équation : $z^2 + pz + q = 0$ admette pour solutions les nombres : $1 + 2i$ et $3 - 5i$

Exercice 18

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$

2) $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$

Polynômes de degré supérieur

Exercice 19

On pose pour tout complexe z : $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$

1) Vérifier que : $f(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$

Exercice 20

1) Montrer que $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$ puis en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^3 - 1 = 0$.

2) On désigne par j le complexe : $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   - Calculer j^2, j^3, $j^{2\,006}$
   - Calculer $S = 1 + j + j^2 + \cdots + j^{2\,006}$

Exercice 21

On considère le polynôme : $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$

1) Déterminer les réels a et b tels que : $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$

2) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z) = 0$

Exercice 22

Pour tout complexe z, on considère : $f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$

1) b est réel. Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaires de $f(ib)$.

2) En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.

3) Démontrer qu'il existe deux nombres réels α et β que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z,

$$f(z) = (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

4) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Exercice 23

Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$

2) $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

3) $z_3 = 4 - 4i$

4) $z_4 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{i\sqrt{3}}{4}$

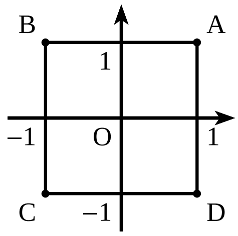
5) $z_5 = -2i$

6) $z_6 = \dfrac{4}{1 - i}$

Exercice 24

Dans le repère orthonormal direct,on a représenté le carré ABCD ci-contre.

Donner l'affixe et un argument de chacun des sommets du carré ABCD



Exercice 25

À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée en degré à 10^{-2} près d'un argument de chacun des nombres complexes suivants :

1) $z = 4 - 3i$ 2) $z = 1 + 2i$ 3) $z = -2 + i$

Exercice 26

Trouver une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

1) $z = (1 - i)^2$ 2) $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$ 3) $z = \dfrac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^{12}}$

Exercice 27

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

1) Donner le module et un argument de z_1, z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$

2) Donner la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$

3) En déduire que : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Forme exponentielle

Exercice 28

Donner une forme exponentielle de chacun des complexes suivants :

1) $z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$ 2) $z_2 = (1 + i\sqrt{3})^4$ 3) $z_3 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{5} - i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$

Exercice 29

Dans chacun des cas suivants, écrire z sous la forme exponentielle et en déduire la forme algébrique de $\bar{z}$ et $\dfrac{1}{z}$.

1) $z_1 = \dfrac{6}{1 + i}$ 2) $z_2 = 3i\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ 3) $z_3 = -12e^{i\frac{\pi}{4}}$

Ensemble de points

Exercice 30

Déterminer et construire les ensembles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 des points dont l'affixe z vérifie la condition proposée.

1) $z = 3e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [0; 2\pi[$
2) $z = r\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec $r \in [0; +\infty[$
3) $z = k\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exercice 31

A et B ont pour affixes respectives 1 et $3 + 2i$.
Déterminer puis construire les ensembles Γ_1 et Γ_2, ensemble des points M dont l'affixe z satisfait les conditions suivantes :

1) $|z - 1| = |z - (3 + 2i)|$
2) $|z - (3 + 2i)| = 1$

Exercice 32

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(\text{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe

$$Z = f(z) = \frac{z - 2 + i}{z + 2i}.$$

1) On pose $z = x + iy$, avec x et y deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.
   On vérifiera que $\text{Re}(Z) = \dfrac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2}$ et $\text{Im}(Z) = \dfrac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y + 2)^2}$.
   ⚠ soyez patient et méthodique !
2) En déduire la nature de :
   a) l'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel ;
   b) l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.
   c) Représenter ces deux ensembles.

Exercice 33

La Réunion juin 2010

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\text{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère le point A d'affixe $1 + i$.
On associe, à tout point M du plan d'affixe $z \neq 0$, le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z - 1 - i}{z}$
Le point M' est appelé le point image du point M.

1) a) Déterminer, l'affixe du point B′, image du point B d'affixe i.
   b) Montrer que, pour tout point M du plan d'affixe z non nulle, l'affixe z' du point M' est telle que $z' \neq 1$.
2) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est telle que $|z'| = 1$.
3) Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est un nombre réel ?

Triangle

Exercice 34

On donne les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c

$$a = 1 + \frac{3}{4}i \quad b = 2 - \frac{5}{4}i \quad c = 3 + \frac{7}{4}i$$

1) Placer les points A, B et C.
2) Quelle est la nature du triangle ABC ?
3) Calculer l'affixe de A' tel que ABA'C soit un carré.

Exercice 35

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2 + 2i$, $b = -3 - 6i$ et $c = 1$.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 36

Les points A, B, C, D ont pour affixes respectives

$$a = 2 - 2i, \quad b = -1 + 7i, \quad c = 4 + 2i, \quad d = -4 - 2i$$

1) Ω est le point d'affixe $\omega = -1 + 2i$
   Prouver que A, B, C, D appartiennent au cercle de centre Ω et de rayon 5.
2) On note e l'affixe du milieu E de [AB].
   Calculez e puis prouver que $\dfrac{a-e}{d-e} = \dfrac{c-e}{a-e}$
   La droite (EA) est une droite remarquable du triangle DEC ; préciser laquelle.

Exercice 37

Polynésie septembre 2011

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. L'unité graphique est 1 cm.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 2-3i$, $z_{\mathrm{B}} = i$ et $z_{\mathrm{C}} = 6-i$.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Partie A

1) Calculer $\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}$.
2) En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{i(z - 2 + 3i)}{z - i}$$

1) Soit D le point d'affixe $z_D = 1 - i$. Déterminer l'affixe du point D′ image du point D par f.
2) a) Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application f est le point d'affixe $2i$.

   b) Démontrer que E est un point de la droite (AB).
3) Démontrer que, pour tout point M distinct du point B, $\text{OM'} = \dfrac{\text{AM}}{\text{BM}}$.
4) Démontrer que, pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité :

$$\left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{\text{OM'}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{BM}}\,,\ \overrightarrow{\text{AM}}\right) + \frac{\pi}{2} \quad \text{à } 2\pi \text{ près}$$

5) Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
6) Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

Exercice 38

Polynésie juin 2006

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(\text{O}, \vec{u}, \vec{v})$; unité graphique 2 cm. On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$. On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z-1}{z+1}$$

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1) Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M tels que M = f(M).
2) a) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1,
   $(z'-1)(z+1) = -2$.

   b) En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1.
   Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
3) Montrer que si M appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle $(\mathscr{C}')$ de centre A et de rayon 1.
4) Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.

   a) Déterminer la forme exponentielle de $(p+1)$.

   b) Montrer que le point P appartient au cercle $(\mathscr{C})$.

   c) Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.
   Montrer que les points A, P' et Q sont alignés dans cet ordre.

   d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f.

Vrai-Faux et QCM

Exercice 39

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Soient A le point d'affixe $2-5i$ et B le point d'affixe $7-3i$.
   Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.

2) Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-i| = |z+2i|$.
   Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.

3) Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.

4) Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 4 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|i+z| = 1+|z|$.

5) Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 5 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

Exercice 40

N$^{\text{lle}}$ Calédonie nov 2013

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1) **Proposition 1** : Pour tout entier naturel n : $(1+i)^{4n} = (-4)^n$.

2) Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0$ où z désigne un nombre complexe.
   Proposition 2 : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

3) **Proposition 3** : Pour tout nombre réel α, $1 + e^{2i\alpha} = 2e^{i\alpha}\cos(\alpha)$.

4) Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{2}(1+i)$ et M_n le point d'affixe $(z_{\mathrm{A}})^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Proposition 4 : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.

5) Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
   Proposition 5 : $1 + j + j^2 = 0$.

Complexe et suite

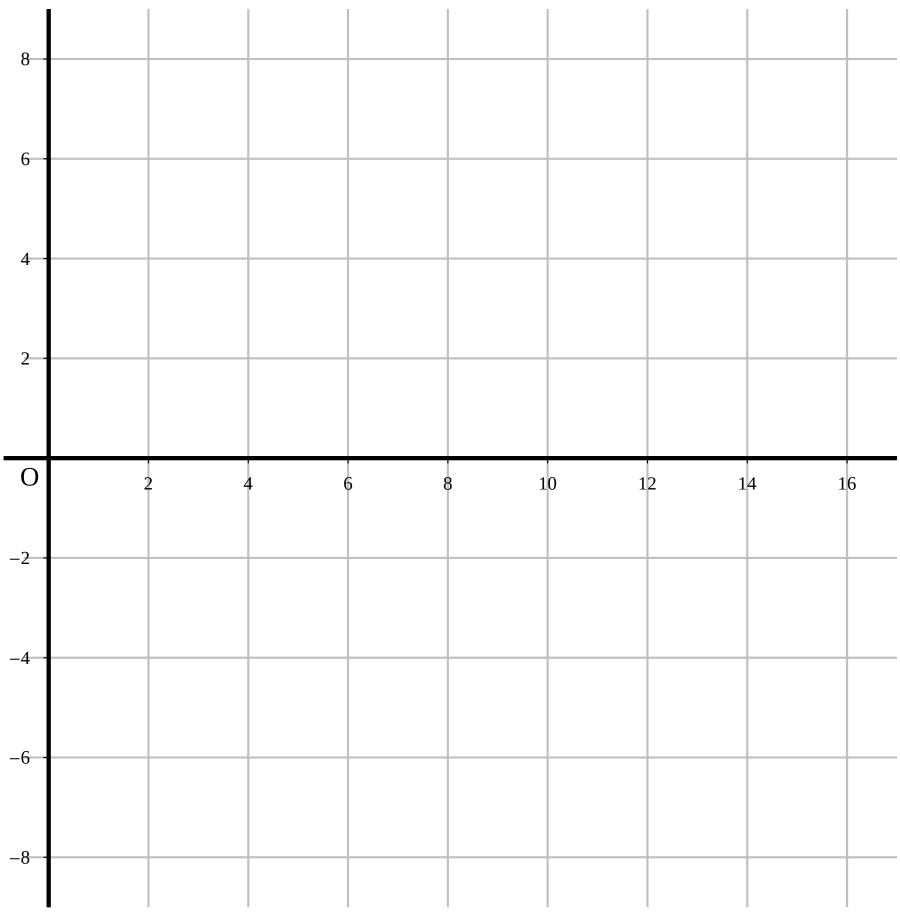
EXERCICE 41

Amérique du Sud nov 2013

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$

1) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
2) On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.
   a) Vérifier que z_1 est une solution de (E).
   b) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
   c) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée ci-dessous et tracer, les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.
3) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $z_n = 2^n\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n i}{2}\right)$.
4) Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

   Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.
5) On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.
   a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ell_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.
   b) Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell_n \geqslant 1\,000$.



EXERCICE 42

Pondichéry avril 2014

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

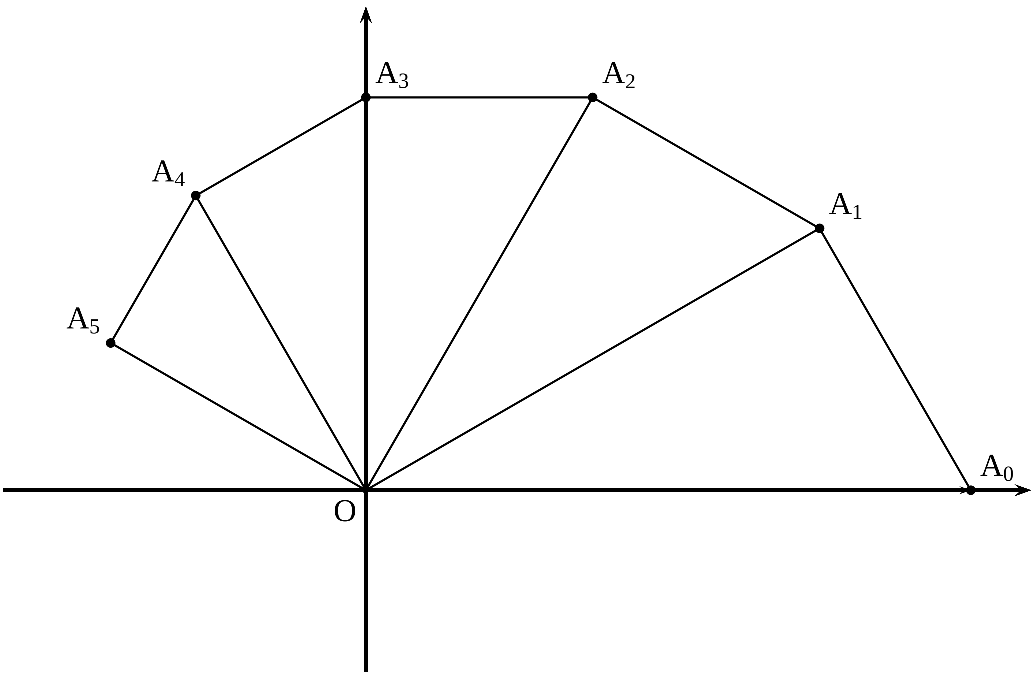
1) Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$.

2) a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.
   c) Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3) On considère l'algorithme suivant :
   a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?
   b) Pour $P = 0,01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables : n entier naturel
R réel et P réel positif
Entrées et initialisation
Lire P
$1 \rightarrow R$
$0 \rightarrow n$
Traitement
tant que $R > P$ **faire**
$n + 1 \rightarrow n$
$\dfrac{\sqrt{3}}{2}R \rightarrow R$
fin
Sorties : Afficher n

4) a) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.
   b) On admet que $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.
   Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.
   c) Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9. Les traits de construction seront apparents.



Exercice 43

Liban mai 2014

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1+i)z_n.$$

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1) Calculer u_0.
2) Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4) Déterminer la limite de la suite (u_n).
5) Étant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.

   Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables : u, p réels
n entier
Entrées et initialisation
$0 \to n$
$2 \to u$
Lire p
Traitement

Sorties :

Partie B

1) Déterminer la forme algébrique de z_1.
2) Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1 + i$.
   En déduire la forme exponentielle de z_1.
3) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 44

Centres étrangers juin 2014

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1) a) Calculer z_1, z_2 et z_3.
   b) Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique ci-après.
   c) Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.

d) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.

2) Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
La suite (r_n) est-elle convergente ?
Interpréter géométriquement le résultat précédent.
On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.
Ainsi $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.

3) a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.
b) Donner une expression de L_n en fonction de n.
c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).