Formulaire sur les complexes

1 Définition

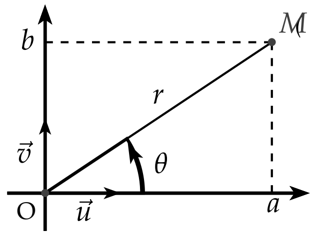
La forme algébrique d'un nombre complexe z est de la forme :

$z = a + ib$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

La partie réelle de z : $\text{Re}(z) = a$

La partie imaginaire de z : $\text{Im}(z) = b$

Le module de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



2 Conjugué

Le conjugué d'un nombre complexe z est noté $\bar{z} = a - ib$,.

Pour tout z complexe, on a : $z\bar{z} = |z|^2$

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$, $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$, $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\,\text{Im}(z)$

z réel alors : $z = \bar{z}$, z imaginaire pur alors : $z + \bar{z} = 0$

3 Second degré

Équation du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$

$az^2 + bz + c = 0$ on a : $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ 2 racines réelles : $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 0$ 1 racine double : $\dfrac{-b}{2a}$

$\Delta < 0$ 2 racines complexes conjuguées : $\dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

4 Forme trigonométrique

La forme trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe z ($z \neq 0$) est de la forme :

$$z = r(\cos\theta) + i\sin\theta) \quad \text{et} \quad z = re^{i\theta}$$

$$\text{avec} \quad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \arg(z) = \theta \quad [2\pi]$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{b}{r}$$

On a les relations : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $-1 = e^{i\pi}$

$|z\,z'| = |z|\,|z'|$ et $\arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z')$ $[2\pi]$

$|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z)$ $[2\pi]$

$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ $[2\pi]$

formule de Moivre : $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{i\,n\theta}$

formule d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Si $z = r\,e^{i\,\theta}$ alors $\bar{z} = r\,e^{-i\,\theta}$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\,e^{-i\,\theta}$

5 Vecteur, alignement et orthogonalité

Soit les point A, B, C et D, on a :

- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ alors $AB = |z_B - z_A|$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ imaginaire pur.