Probabilités conditionnelles
Loi binomiale

1 Probabilité

1.1 Généralités

Lors d'une expérience aléatoire :

- L'univers Ω est l'ensemble des issues possibles.
- Un événement A est une partie de l'univers.
- Un événement élémentaire e_i est un événement ne comportant qu'un seul élément.
- L'événement contraire de l'événement A est l'événement noté $\overline{\text{A}}$ formé de tous les éléments de Ω n'appartenant pas à A.
- L'événement $\text{A} \cap \text{B}$ (noté aussi "A et B") est l'événement formé des éléments de Ω appartenant à A et à B.
- L'événement $\text{A} \cup \text{B}$ (noté aussi "A ou B") est l'événement formé des éléments de Ω appartenant au moins à l'un des événements A ou B.
- Deux événements A et B sont dits incompatibles si $\text{A} \cap \text{B} = \varnothing$.
- Si $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et si à chaque issue e_i on associe un nombre $P(e_i)$ tel que $0 \leqslant P(e_i) \leqslant 1$ et $P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n) = 1$, on dit que l'on a défini une loi de probabilité sur Ω.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Pour tous événements A et B :

- $P(\varnothing) = 0\,; \quad P(\Omega) = 1$
- $0 \leqslant P(\text{A}) \leqslant 1\,; \quad P(\overline{\text{A}}) = 1 - P(\text{A})$
- $P(\text{A} \cup \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A} \cap \text{B})$
  (si A et B sont incompatibles alors $p(\text{A} \cup \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B})$)
- Pour une loi équirépartie :

$$P(\text{A}) = \frac{\text{nbre d'éléments de A}}{\text{nbre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

1.2 Variable aléatoire

Une variable aléatoire X définie sur un univers Ω est une fonction qui à chaque issue associe un réel x_i. La probabilité que X prenne la valeur x_i est alors notée $P(\text{X} = x_i)$ ou p_i.

- Définir la loi de probabilité de X, c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des événements $\text{X} = x_i$.
- Espérance mathématique de X : $E(\text{X}) = \sum p_i x_i = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$
  L'espérance représente la valeur moyenne que prend X si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire
- Variance de X : $V(\text{X}) = \sum p_i x_i^2 - E^2(\text{X}) = p_1 x_1^2 + \dots + p_n x_n^2 - E^2(\text{X})$
- Écart-type de X : $\sigma(\text{X}) = \sqrt{V(\text{X})}$

Exemple : On lance 3 fois de suite un dé. Le joueur gagne 6 euros s'il n'obtient aucun 1 et aucun 2 et il perd 3 euros dans le cas contraire. X, la variable aléatoire égale au gain du joueur, ne peut prendre que les valeurs -3 et 6.

On a $P(\text{X} = 6) = \dfrac{4^3}{6^3} = \dfrac{8}{27}$ et $P(\text{X} = -3) = 1 - p(\text{X} = 6) = \dfrac{19}{27}$

$$E(\text{X}) = -3 \times \frac{19}{27} + 6 \times \frac{8}{27} = -\frac{1}{3}$$

$$V(\text{X}) = (-3)^2 \times \frac{19}{27} + 6^2 \times \frac{8}{27} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{152}{9} \quad \text{et} \quad \sigma(\text{X}) = \sqrt{\frac{152}{9}} = \frac{2\sqrt{38}}{3}$$

2 Probabilités conditionnelles

Etant donné deux événements A et B ($\text{B} \neq \varnothing$) d'un univers Ω. On appelle probabilité de B sachant A, le réel noté $P_{\text{A}}(\text{B})$ tel que :

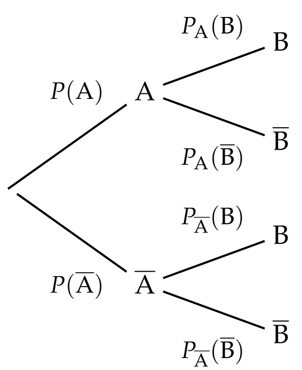
$$P_{\text{A}}(\text{B}) = \frac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{A})}$$

On a alors : $P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) \times P_{\text{A}}(\text{B}) = P(\text{B}) \times P_{\text{B}}(\text{A})$

Formule des probabilités totales
Si A_1, A_2,…,A_n forment une partitions de Ω (2 à 2 incompatibles et leur union forme Ω), alors pour tout événement B, on a :
$P(B) = P(A_1 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \cdots + P(A_n)P_{A_n}(B)$

Représentation par un arbre pondéré

Le cas le plus fréquent correspondond à la partition la plus simple (A et $\overline{A}$). Si on connaît les probabilité de B et $\overline{B}$ par l'intermédiare de A et $\overline{A}$, on a l'arbre suivant :

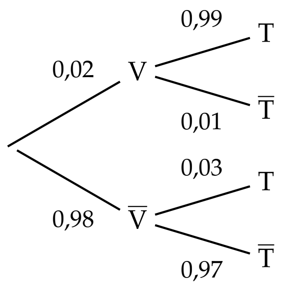


- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
  $P(A) \times P_A(B) = P(A \cap B)$
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
  $P_A(B) + P_{\overline{A}}(B) = 1$
- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.
  $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$

Exemple : Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».



- Quelle est la probabilité que le test soit positif

  $P(T) = 0,02 \times 0,99 + 0,98 \times 0,03 = 0,0492$
- Quelle est la probabilité que la personne soit contaminée sachant que le test est positif :

  $$P_T(V) = \frac{P(T \cap V)}{P(T)} = \frac{0,02 \times 0,99}{0,0492} = 0,4024$$

3 Indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :
$$P_A(B) = P(B) \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

4 Loi binomiale

- On appelle épreuve de Bernoulli toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraire l'une de l'autre)
- On appelle schéma de Bernoulli toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes

Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve.
Si on note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathscr{B}(n;p)$.

- Probabilité d'obtenir k succès : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- Espérance de X : $E(X) = np$
- Variance et écart-type de X : $V(X) = np(1-p)$; $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$