Définition

Lorsqu'une variable aléatoire X est continue, la notion d'événement est difficile à définir. On contourne cette difficulté en associant à la variable X un intervalle I de $\mathbb{R}$ et en définissant une densité de probabilité f.

- $\mathrm{I} = [a;b]$ ou $[a;+\infty[$ ou $\mathbb{R}$
- f est un fonction continue positive sur I telle que :

$$p(X \in \mathrm{I}) = \int_{(\mathrm{I})} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

- Si $\mathrm{J} = [\alpha;\beta] \subset \mathrm{I}$ alors : $p(X \in \mathrm{J}) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$
- F fonction de répartition définie par : $F(x) = p(X \leqslant x)$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad \text{ou} \quad \lim_{a \to -\infty} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Loi exponentielle

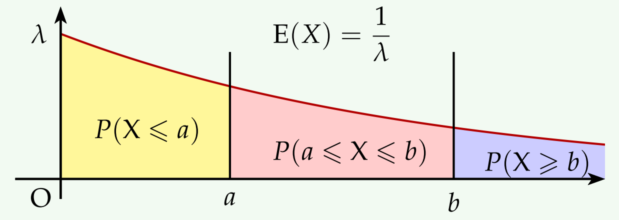
X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

- f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$
- F la fonction de répartition : **ROC**

$$F(x) = p(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-\lambda x}$$

On a les probabilités suivantes :

- $p(X \leqslant a) = F(a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- $p(X \geqslant b) = 1 - F(b) = e^{-\lambda b}$
- $p(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$



$$p(X \leqslant t_{1/2}) = p(X \geqslant t_{1/2}) \Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \text{demi-vie}$$

Loi exponentielle : loi sans mémoire

La loi exponentielle est une loi sans mémoire, i.e. :

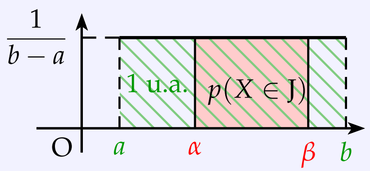
$$\forall t > 0,\ h > 0, \quad p_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = p(X \geqslant h)$$

On dit que la durée de vie d'un appareil est sans mémoire ou sans vieillissement lorsque la probabilité que l'appareil fonctionne encore h années supplémentaires sachant qu'il fonctionne à l'instant t, **ne dépend pas de** t.

Quelques lois de probabilités continues

Loi uniforme

La loi uniforme est le pendant de la loi d'équiprobabilité pour une loi discrète. Sa densité f est constante sur l'intervalle $[a;b]$ et $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$



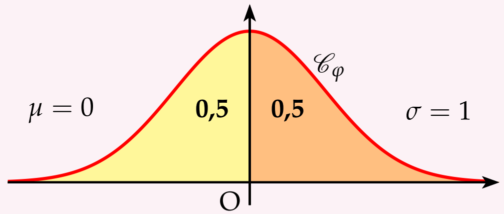
- $p(X \in \mathrm{J}) = \dfrac{\beta - \alpha}{b - a} = \dfrac{\text{longueur de J}}{\text{longueur de I}}$
- $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_a^b \frac{t}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{a+b}{2}$

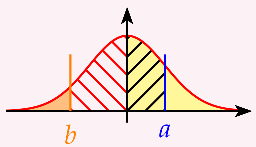
On utilise la loi uniforme avec la **méthode de Monte-Carlo**, méthode probabiliste très utilisée dans de nombreux domaines : par exemple pour calculer l'aire sous une courbe d'une fonction dont le calcul intégral se révèle trop compliqué.

Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

X suit une loi normale centrée réduite de densite φ

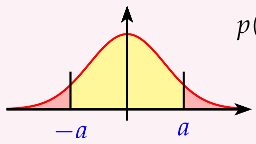
- φ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$
- Φ la fonction de répartition : $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$





$p(X \leqslant a) = 0,5 + p(0 \leqslant X \leqslant a)$

$p(X \geqslant b) = p(b \leqslant X \leqslant 0) + 0,5$

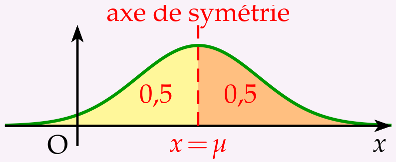


$$p(-a \leqslant X \leqslant a) = 1 - 2p(X \leqslant -a) = 1 - 2p(X \geqslant a)$$

$p(X \leqslant -a) = p(X \geqslant a)$

Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Si la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors la variable $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.
La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ est une loi « étalon ».



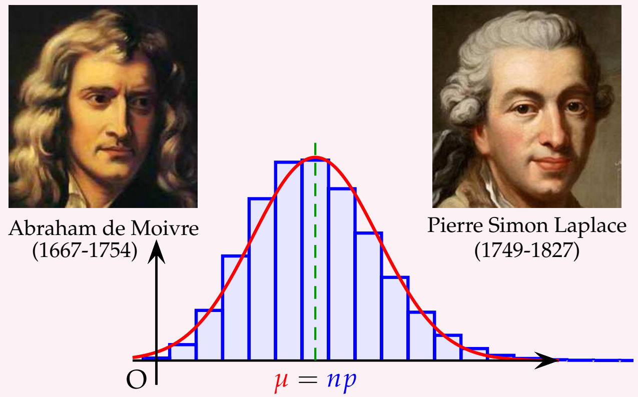
Comme avec la loi normale centrée réduite, la densité est une courbe en cloche d'axe de symétrie $x = \mu$
⚠ $p(X \leqslant \mu) = p(X \geqslant \mu) = 0,5$

Culture

Théorème Central-limit Lorsque l'on fait la somme d'un très grand nombre de variables aléatoires de loi quelconque, cette somme suit une loi normale.

Remarque
Un grand nombre de distributions dans la nature suivent une loi normale car ces distributions décrivent des phénomènes qui résultent d'un grand nombre de causes de fluctuations indépendantes comme la taille d'un individu.

Graphes comparés entre loi binomiale et loi normale



Abraham de Moivre (1667-1754)

Pierre Simon Laplace (1749-1827)

Loi normale et loi de Bernoulli

Valeurs à retenir

- $p(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = 0,683$ à 10^{-3} près
- $p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = 0,954$ à 10^{-3} près
- $p(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) = 0,997$ à 10^{-3} près

- $\mathrm{E}(X) = \mu$ et $\mathrm{V}(X) = \sigma^2$

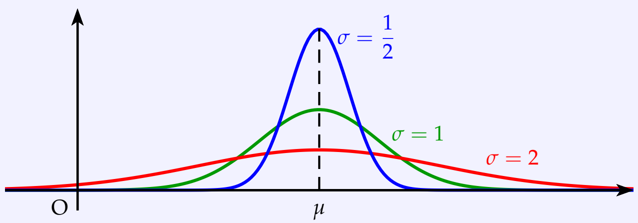
Approximation normale d'une loi binomiale

Théorème de Moivre-Laplace

Soit $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. Si $X \longrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ est proche d'une loi normale centrée réduite.
X est alors proche de la loi normale $\mathcal{N}\left[np\,,\ \sqrt{np(1-p)}^{\,2}\right]$.

Influence de l'écart type

Plus l'écart type est important, plus la courbe de densité est évasée et plus le maximum est petit.



Encadrement et loi $\mathcal{N}(0,1)$

X suit une loi normale centrée réduite. Soit α un réel de l'intervalle $]0\,;\,1[$. Il existe un unique réel strictement positif u_α tel que :

$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Exemple : $X \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
Déterminer l'intervalle I centré en 0 tel que $P(X \in \mathrm{I}) = 0,8$.

$1 - \alpha = 0,8 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0,2$
$\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad u_\alpha = \Phi^{-1}(0,9)$.
$u_\alpha \approx 1,28$ donc $\mathrm{I} = [-1,28 ; 1,28]$

Exemple

On lance 180 fois un dé et on note X le nombre d'apparition de la face 6.
Quelle est la probabilité d'obtenir au plus 20 fois un 6 ?

- X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(180\,;\,\dfrac{1}{6}\right)$
- $n = 180 \geqslant 30$, $np = 30 \geqslant 5$, $n(1-p) = 150 \geqslant 5$.
  L'approximation normale est vérifiée.
- X suit alors la loi normale $\mathcal{N}(30\,;\,5^2)$
  $p(\,X \leqslant 20\,) = p_N(\,X \leqslant 20,5\,) \approx 0,029$
  La condition $X \leqslant 20,5$ provient de la correction du continue pour passer d'une loi discrète à une loi continue.
- $Z = \dfrac{X - 30}{5}$ suit alors la loi normale $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
  $p(\,X \leqslant 20\,) = p_N\left(\,Z \leqslant \dfrac{20,5 - 30}{5}\,\right) = p_N(\,Z \leqslant -1,9\,)$