Géométrie dans l'espace - Autres exercices

EXERCICE 1

Pondichéry mai 2018

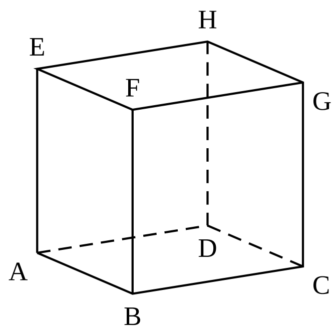
Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(2 ; 1 ; 4)$, $(4 ; -1 ; 0)$, $(0 ; 3 ; 2)$ et $(4 ; 3 ; -2)$.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).
2) Soit M un point de la droite (CD).
   a) Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.
   b) On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées $(3 ; 3 ; -1)$. Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.
   c) Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2.
3) a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
   c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).
   d) Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{8}{3}\right)$.
4) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

EXERCICE 2

Amérique du Sud nov 2017

On considère un cube ABCDEFGH.



1) a) Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.
   b) En déduire que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
   c) On admet que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.
   Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
2) L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
   a) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est : $x + y + z - 1 = 0$.

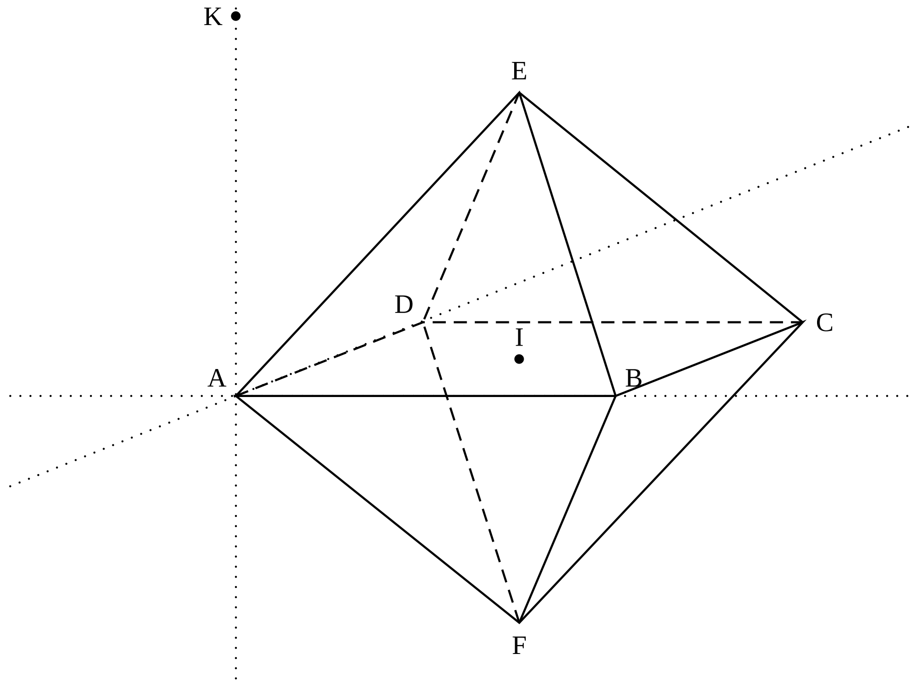
b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE).

c) On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Calculer le volume de la pyramide BDEG.

EXERCICE 3

Liban mai 2016

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée c-dessous. Toutes les arêtes sont de longueur 1.



L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AK}\right)$.

1) a) Montrer que $IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I, E et F.

b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).

2) On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui du segment [AB].

a) Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

b) Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

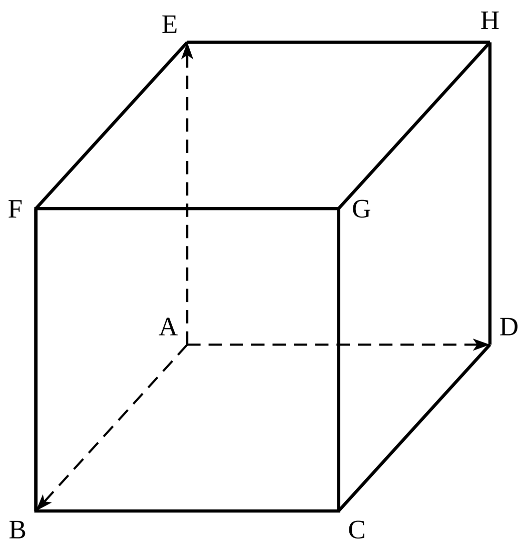
c) Construire sur la perspective la section du solide ADECBF par le plan (EMN).

Exercice 4

Pondichéry avril 2017

On considère un cube ABCDEFGH ci-dessous.
L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0$.
Construire, sur la figure, la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.
La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.

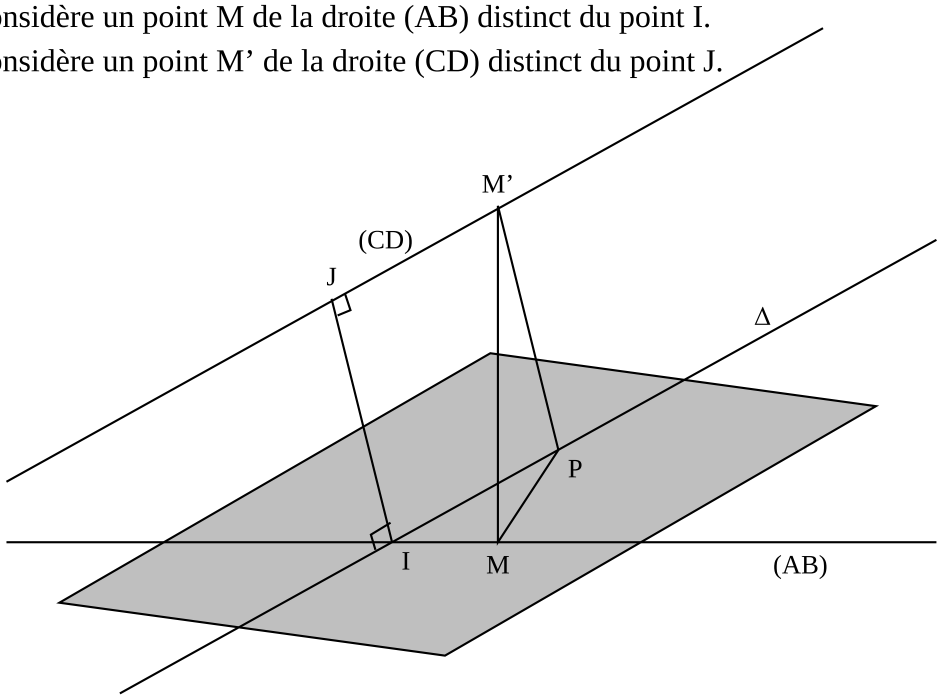


Exercice 5

Amérique du Nord mai 2018

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A.
On considère les points $B(10\,;\,-8\,;\,2)$, $C(-1\,;\,-8\,;\,5)$ et $D(14\,;4\,;8)$.

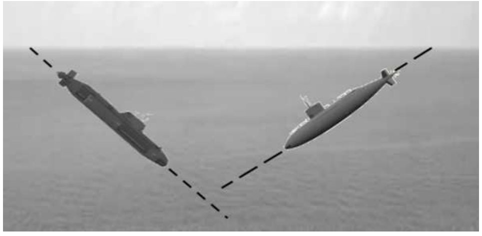
1) a) Déterminer une représentation paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD).
   b) Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.
2) On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4.
   a) Déterminer les coordonnées des points I et J et en déduire la distance IJ.
   b) Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).
   La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).
3) Cette question a pour but de vérifier que la distance IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).
   Sur le schéma ci -dessous on a représenté les droites (AB) et (CD), les points I et J, et la droite Δ parallèle à la droite (CD) passant par I.
   On considère un point M de la droite (AB) distinct du point I.
   On considère un point M' de la droite (CD) distinct du point J.



   a) Justifier que la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M' coupe la droite Δ en un point que l'on notera P.
   b) Démontrer que le triangle MPM' est rectangle en P.
   c) Justifier que $MM' > IJ$ et conclure.

EXERCICE 6

Liban mai 2018



L'objectif de cet exercice est d'étudier les trajectoires de deux sous-marins en phase de plongée.
On considère que ces sous-marins se déplacent en ligne droite, chacun à vitesse constante.

À chaque instant t, exprimé en minutes, le premier sous-marin est repéré par le point $S_1(t)$ et le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$ dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ dont l'unité est le mètre.
Le plan défini par $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ représente la surface de la mer. La cote z est nulle au niveau de la mer, négative sous l'eau.

1) On admet que, pour tout réel $t \geqslant 0$, le point $S_1(t)$ a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) &= 140 - 60t \\ y(t) &= 105 - 90t \\ z(t) &= -170 - 30t \end{cases}$$

   a) Donner les coordonnées du sous- marin au début de l'observation.

   b) Quelle est la vitesse du sous-marin ?

   c) On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin.
   Déterminer l'angle α que forme la trajectoire du sous-marin avec le plan horizontal.
   On donnera l'arrondi de α à 0,1 degré près.

2) Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées $(68\ ;\ 135\ ;\ -68)$ et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées $(-202\ ;\ -405\ ;\ -248)$ avec une vitesse constante.
   À quel instant t, exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?