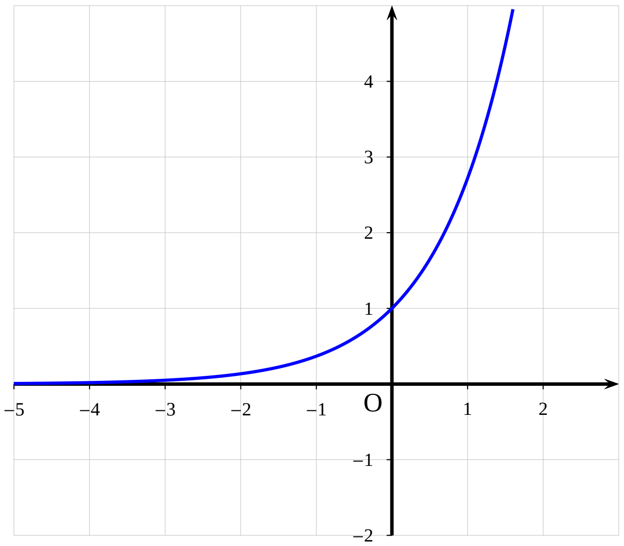
Révision : suites, fonctions, fonctions exponentielle et logarithme

EXERCICE 1

Liban 27 mai 2015

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = e^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1) Dans cette question, on choisit $m = e$.
   Démontrer que la droite $\mathscr{D}_e$, d'équation $y = ex$, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.
2) Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}_m$.
3) Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 2

Liban 27 mai 2015

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

pour tout entier naturel n, $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$

1) Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x.$
2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
   b) En déduire la valeur exacte de u_1.

3) a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables : i et n sont des entiers naturels
u est un réel
Entrées et initialisation
Saisir n
Affecter à u la valeur ......
Traitement
pour i variant de 1 à ...... **faire**
Affecter à u la valeur ......
fin
Sorties : Afficher u

b) À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,693 1	0,306 9	0,193 1	0,140 2	0,109 8	0,090 2	0,047 5	0,009 9	0,005 0

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4) a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

5) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $\ell = 0$.