

Révision : Suites. Intégration

EXERCICE 1

Pondichéry mai 2018

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.

On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint. La température du four est exprimée en degré Celsius (°C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70 °C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

Pour un nombre entier naturel n , on note T_n la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $T_0 = 1\,000$.

La température T_n est calculée par l'algorithme suivant :

```

T ← 1 000
pour i variant de 1 à n faire
|   T ← 0,82 × T + 3,6
fin
  
```

- 1) Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement.
- 2) Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$.
- 3) Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

EXERCICE 2

Liban mai 2018

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement « la n^{e} partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet évènement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

- 1) Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.
- 2) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.
- 3) On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	1	0,437 5	0,390 6	0,402 3	0,399 4	0,400 1	0,399 9

Quelle conjecture peut-on émettre ?

- 4) On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.
- Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
 - La suite (p_n) converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.

EXERCICE 3

Métropole septembre 2017

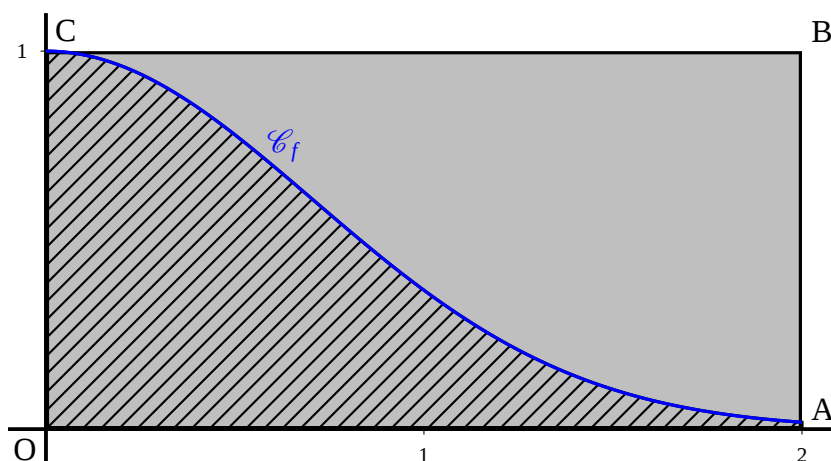
Partie A

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_0^n e^{-x^2} dx$

- Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 - Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $-x^2 \leq -2x + 1$, puis : $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$.
En déduire que pour tout entier naturel n , on a : $u_n < \frac{e}{2}$.
 - Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas à calculer sa limite.
- Dans cette question, on se propose d'obtenir une valeur approchée de u_2 .

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par $f(x) = e^{-x^2}$, et le rectangle OABC où A(2; 0), B(2; 1) et C(0; 1).

On a hachuré le domaine $\mathcal{D}$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.



On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un point M au hasard à l'intérieur du rectangle OABC.

On admet que la probabilité p que ce point appartienne au domaine est : $p = \frac{\text{aire de } \mathcal{D}}{\text{aire de OABC}}$.

- Justifier que $u_2 = 2p$.

b) On considère l'algorithme suivant :

```

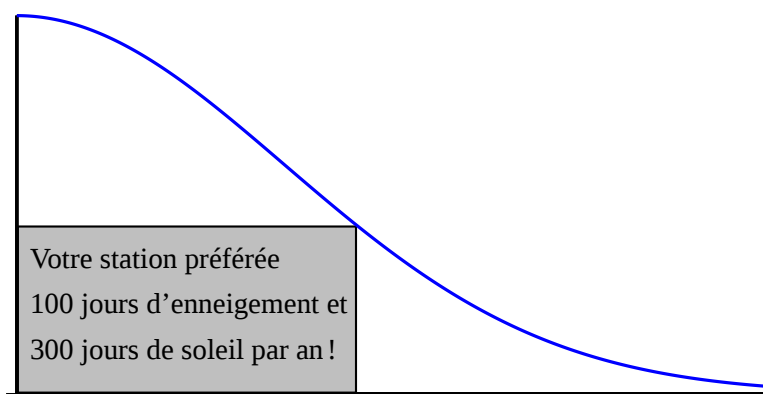
Variables :  $N, C$  nombres entiers ;  $X, Y, F$  nombres réels
Entrées et initialisation
| Saisir  $N$ 
|  $C$  prend la valeur 0
Traitement et sorties
| pour  $k$  variant de 1 à  $N$  faire
|    $X$  prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 2
|    $Y$  prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 1
|   si  $Y \leq e^{-x^2}$  alors
|      $C$  prend la valeur  $C + 1$ 
|   fin
| fin
| Afficher  $C$ 
|  $F$  prend la valeur  $C/N$ 
| Afficher  $F$ 

```

- i) Que permet de tester la condition concernant la position du point $M(X ; Y)$?
 - ii) Interpréter la valeur F affichée par cet algorithme.
 - iii) Que peut-on conjecturer sur la valeur de F lorsque N devient très grand?
- c) En faisant fonctionner cet algorithme pour $N = 10^6$, on obtient $C = 441\,138$.
 On admet dans ce cas que la valeur F affichée par l'algorithme est une valeur approchée de la probabilité p à 10^{-3} près.
 En déduire une valeur approchée de u_2 à 10^{-2} près.

Partie B

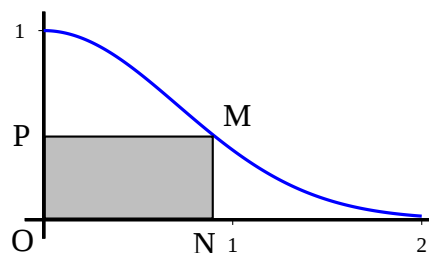
Une entreprise spécialisée est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.
 Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire est insérée sur le panneau comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Le panneau, modélisé par le domaine $\mathcal{D}$ défini dans la partie A, est découpé dans une plaque rectangulaire de 2 mètres sur 1 mètre. Il est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; l'unité choisie est le mètre.

Pour x nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 2]$, on note :

- M point de la $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(x; e^{-x^2})$,
- N point de coordonnées $(x; 0)$,
- P point de coordonnées $(0; e^{-x^2})$,
- $A(x)$ l'aire du rectangle ONMP.



- 1) Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 2]$, on a : $A(x) = xe^{-x^2}$.
- 2) Déterminer la position du point M sur la courbe $\mathcal{C}_f$ pour laquelle l'aire du rectangle ONMP est maximale.
- 3) Le rectangle ONMP d'aire maximale obtenu à la question 2) doit être peint en bleu, et le reste du panneau en blanc. Déterminer, en m^2 et à 10^{-2} près, la mesure de la surface à peindre en bleu et celle de la surface à peindre en blanc.