Révision : Suites. Intégration

EXERCICE 1

Pondichéry mai 2018

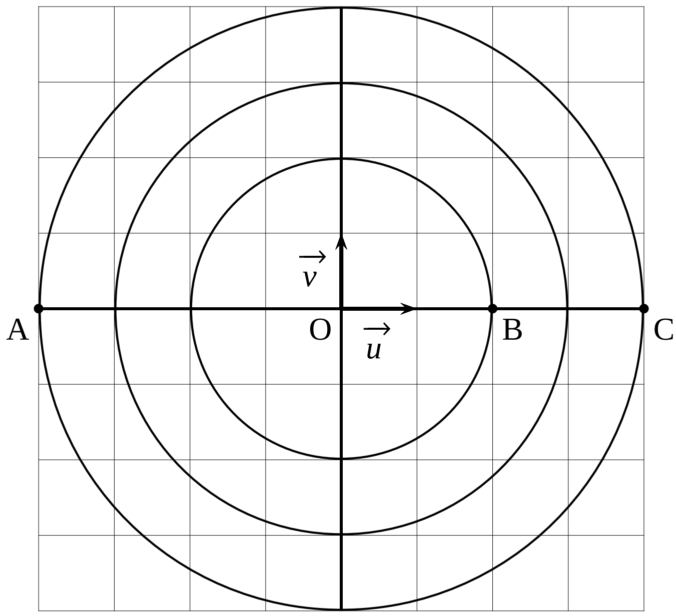
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = -4$, $b = 2$ et $c = 4$.

1) On considère les trois points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = ja$, $b' = jb$ et $c' = jc$ où j est le nombre complexe $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   a) Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle de j.
   En déduire les formes algébriques et exponentielles de a', b' et c'.

   b) Les points A, B et C ainsi que les cercles de centre O et de rayon 2, 3 et 4 sont représentés sur le graphique ci-dessous.



   Placer les points A′, B′ et C′ sur ce graphique.

2) Montrer que les points A′, B′ et C′ sont alignés.

3) On note M le milieu du segment [A′C], N le milieu du segment [C′C] et P le milieu du segment [C′A].
   Démontrer que le triangle MNP est isocèle.

EXERCICE 2

Liban mai 2018

1) Donner les formes exponentielle et trigonométrique des nombres complexes

$$1 + i \quad \text{et} \quad 1 - i$$

2) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = (1+i)^n + (1-i)^n$..

a) Déterminer la forme trigonométrique de S_n.

b) *Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.*

Affirmation A : Pour tout entier naturel n, le nombre complexe S_n est un nombre réel.

Affirmation B : Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n = 0$.

Exercice 3

Antilles-Guyane septembre 2017

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie par

$$\begin{cases} z_0 = 100 \\ z_{n+1} = \dfrac{i}{3} z_n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.

2) On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r, où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{AM} \leqslant r$.
Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

Exercice 4

Polynésie septembre 2017

On rappelle que pour tout réel a et tout réel b :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + 2$.

1) Montrer que si le réel θ appartient à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{3\pi}{4}\right[$, alors $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) > 0$.

2) Soit M un point du plan complexe d'affixe z non nulle.
On note $\rho = |z|$ le module de z et $\theta = \arg(z)$ un argument de z.
Les nombres ρ et θ sont appelés coordonnées polaires du point M.
Montrer que le point M appartient à la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si ses coordonnées polaires sont liées par la relation :

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)} \quad \text{avec } \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right[\quad \text{et } \rho > 0.$$

3) Déterminer les coordonnées du point de la droite $\mathscr{D}$ le plus proche de l'origine O.