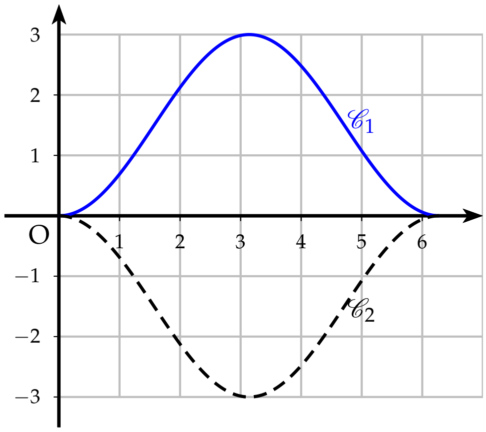
Révision : Fonctions et intégration

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,2\pi]$ par : $f(x) = -1,5\cos(x) + 1,5$.

On admet que la fonction f est continue sur $[0\,;\,2\pi]$.
On note $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

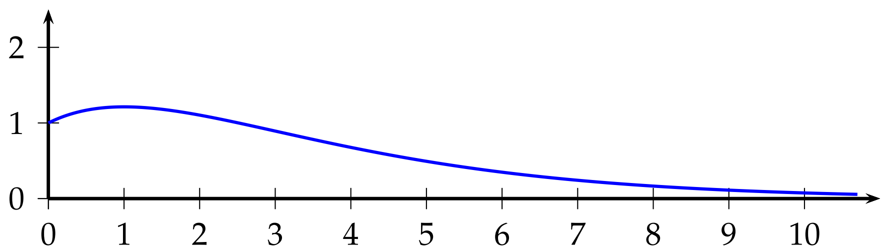


1) Démontrer que la fonction f est positive sur $[0\,;\,2\pi]$.
2) Sur la figure ci-dessus, la courbe tracée en tiretés, notée $\mathscr{C}_2$, est la courbe symétrique de $\mathscr{C}_1$ par rapport à l'axe des abscisses.
   La forme d'un objet est celle de la zone délimitée par les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
   On note $\mathscr{A}$ son aire, exprimée en unité d'aire.
   Estimer $\mathscr{A}$ puis calculer $\mathscr{A}$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = (ax+b)e^{-\frac{1}{2}x}$.

où a et b désignent deux nombres réels. On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous.



Elle coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

1) Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(1)$.

2) Démontrer que, pour tout réel positif x : $f'(x) = \left(-\dfrac{1}{2}ax - \dfrac{1}{2}b + a\right) e^{-\frac{1}{2}x}$.

3) Déterminer les valeurs de a et b.

Partie B

Pour la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{2}x}$.

1) a) Justifier que, pour tout réel x positif, $f(x) = 2\left(\dfrac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{1}{2}x}}\right) + e^{-\frac{1}{2}x}$.

   b) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$,

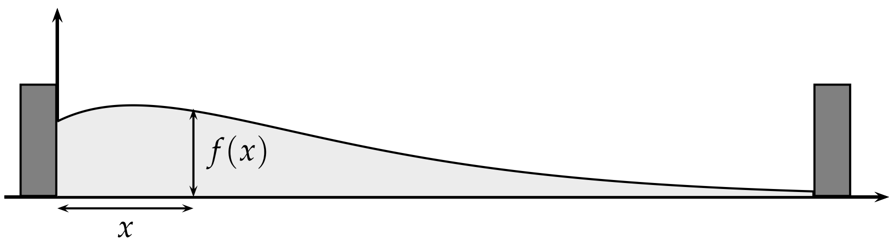
2) Étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$ et construire son tableau de variations.

3) Démontrer que l'équation $f(x) = 0,07$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

4) Donner l'arrondi de α à l'unité.

Partie C - Modélisation d'un tas de sable

Dans cette partie, on considère que la courbe de la fonction f modélise le profil d'un tas de sable. La longueur x et la hauteur $f(x)$ sont exprimées en mètres.
Ainsi, le fait que $f(0) = 1$ signifie qu'à son extrémité gauche, la hauteur du tas de sable est de 1 mètre.
On souhaite que le tas de sable soit limité par deux murs comme indiqué sur le schéma ci-dessous.
Le mur de gauche coïncide avec l'axe des ordonnées et le mur de droite est placé de telle sorte que la hauteur de sable à cet endroit est de 7 cm.



1) Pourquoi le mur de droite doit-il être placé à environ 10 mètres du mur de gauche ?

2) Vérifier que la fonction G définie sur $[0; 10]$ par $G(x) = (-2x-4)e^{-\frac{1}{2}x}$ est une primitive de la fonction g définie sur $[0; 10]$ par $g(x) = xe^{-\frac{1}{2}x}$.

3) En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.

4) Pour pouvoir créer un terrain de sport sur sable, on décide de niveler le tas de sable, c'est-à-dire de l'étaler à une même hauteur entre les deux murs.
   Quelle sera la hauteur du tas de sable une fois le nivellement réalisé ? Expliquer le raisonnement et arrondir le résultat au centimètre.

EXERCICE 3

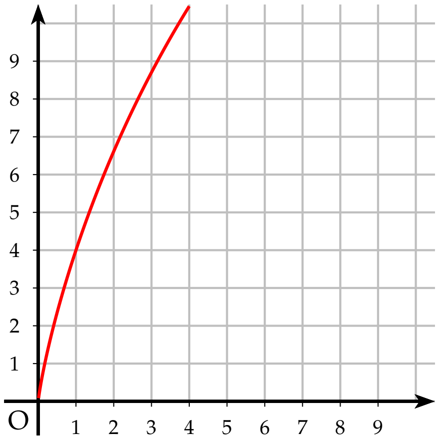
Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = 4x - x\ln x$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa dérivée.

Partie A

Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe représentative de la fonction g obtenue par un élève sur sa calculatrice. Cet élève émet les deux conjectures suivantes :

- il semble que la fonction g soit positive ;
- il semble que la fonction g soit strictement croissante.



L'objectif de cette partie est de valider ou d'invalider chacune de ces conjectures.

1) Résoudre l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2) Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
3) Les conjectures de l'élève sont-elles vérifiées ?

Partie B

Dans cette partie, on poursuit l'étude de la fonction g.

1) a) On rappelle que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$.

   En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$.

   b) Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

   c) Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2) a) Déterminer la fonction dérivée g'.

   b) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

3) Soit G la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $G(x) = \dfrac{1}{4}x^2(9 - 2\ln x)$.

   On admet que la fonction G est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

   a) Démontrer que la fonction G est une primitive de la fonction g sur $]0\,;+\infty[$.

   b) L'affirmation suivante est-elle vraie ?

   « Il n'existe aucun réel α strictement supérieur à 1 tel que $\displaystyle\int_1^{\alpha} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. »