Révision : Les nombres complexes

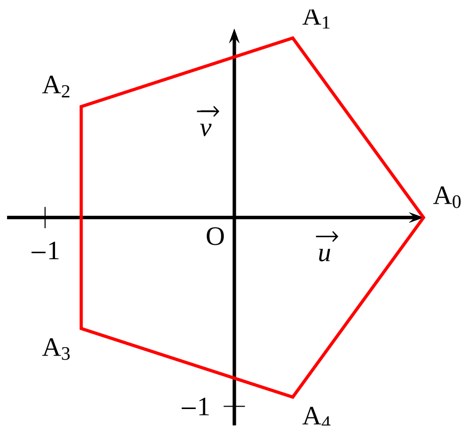
EXERCICE 1

Pondichéry avril 2016

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, de centre O tel que $\overrightarrow{OA_0} = \vec{u}$.
On rappelle que dans le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, ci-contre :

- les cinq côtés sont de même longueur ;
- les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 appartiennent au cercle trigonométrique ;
- pour tout entier $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ on a : $\left(\overrightarrow{OA_k}\ ;\ \overrightarrow{OA_{k+1}}\right) = \dfrac{2\pi}{5}$.



1) On considère les points B d'affixe -1 et J d'affixe $\dfrac{i}{2}$.

   Le cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon $\dfrac{1}{2}$ coupe le segment [BJ] en un point K.

   Calculer BJ, puis en déduire BK.

2) a) Donner sous forme exponentielle l'affixe du point A_2. Justifier brièvement.

   b) Démontrer que $(BA_2)^2 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

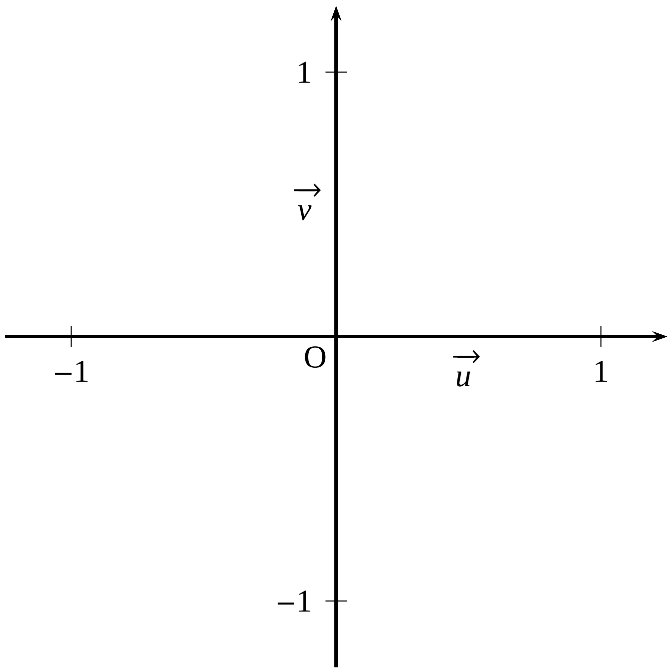
   c) Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous, que l'on pourra utiliser sans justification :

► Calcul formel	
1	cos (4*pi/5) $\rightarrow \dfrac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)$
2	sqrt((3 - sqrt(5))/2)
	$\rightarrow \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$

« sqrt » signifie « racine carrée »

   En déduire, grâce à ces résultats, que $BA_2 = BK$.

3) Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ donné en annexe, construire à la règle et au compas un pentagone régulier. N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.



EXERCICE 2

Liban mai 2016

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Soit z un nombre complexe différent de 2. On pose : $Z = \dfrac{iz}{z-2}$.

1) L'affirmation suivantes est-elle vraie ou fausse ?
« L'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est une droite passant par le point A(1 ; 0). »

2) L'affirmation suivantes est-elle vraie ou fausse ?
« Z est un imaginaire pur si et seulement si z est réel. »

Partie B

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie par : $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}i \times z_n + 5 \end{cases}$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2i$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}i \times u_n$.
   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = \left(\dfrac{1}{2}i\right)^n (-4-2i)$.

2) Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Exercice 3

Centre étrangers juin 2015

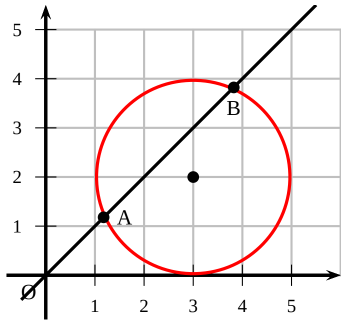
Pour chacune des deux affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions : $|z-1| = |z-i|$ et $|z-3-2i| \leqslant 2$.

   Sur la figure ci-contre, on a représenté le cercle de centre le point de coordonnées $(3\,;\,2)$ et de rayon 2, et la droite d'équation $y = x$.

   Cette droite coupe le cercle en deux points A et B.

   Affirmation 1 : « l'ensemble S est le segment [AB]. »



2) **Affirmation 2 :** « le nombre complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^{1\,515}$ est un réel. »

Exercice 4

Métropole juin 2015

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :
$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$
   Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.
   a) Calculer le module et un argument du nombre a.
   b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b.
   c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
   d) Placer les points A, B et C dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
3) Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2) d) complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

   Soit les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.
   a) Montrer que $b' = 8$.
   b) Calculer le module et un argument du nombre a'.
4) Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

   On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment [MN] a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n-m|$.
   a) On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].
      Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.
   b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ?
      Justifier ce résultat.