Exercices d'oraux

Consignes :

- L'oral comporte deux questions dont une de spécialité pour le candidats concernés.
- L'épreuve est constituée d'une préparation d'une vingtaine de minutes suivie d'un entretien de même durée.
- Vous pouvez utiliser votre calculatrice et du brouillon.
- Les exercices constituent une base d'argumentation pour l'entretien : vous préparerez des réponses que vous devrez être capable de justifier en précisant, lorsque c'est utile, les notions de cours indispensables. (Il est inutile de les rédiger complétement par écrit).
- La démarche et la pertinence des justifications seront valorisées.
- Des questions complémentaires peuvent être posées au cours du dialogue.

Sujet n°1

Exercice 1.1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 2^n - 1$

Exercice 1.2

On donne les droite d et d' de représentation paramétriques suivantes :

$$d : \begin{cases} x = 6 - 3s \\ y = -7 + 2s \\ z = -1 + s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d' : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -3 \\ z = -5 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Démontrer que ces droite sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Sujet n°2

Exercice 2.1

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \sin(2x)\,\mathrm{d}x$

a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $0 \leqslant I_n \leqslant \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{n+1}$

b) Quelle est la limite de la suite I_n ?

Exercice 2.2

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ les plans d''équations respectives : $2x + 3y + z - 4 = 0$ et $x - y + 5 = 0$.

a) Montrer que ces plans sont sécants.

b) Déterminer le système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection.

Sujet n°3

Exercice 3.1

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

a) Montrer par récurrence que pour tout naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Justifier votre réponse.

Exercice 3.2

On donne les points A$(3; -2; 1)$, B$(5; 2; -3)$ et $C(6; -2; -2)$.

a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés, et que $\vec{n}(2; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)

Sujet n°4

Exercice 4.1

Pour chacune des affirmation ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

a) Si pour tout $x > 0$, on a $f(x) \leqslant \dfrac{2}{x}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b) Si pour tout $x > 0$, on a $2 + \dfrac{2}{x} \leqslant f(x) \leqslant 2 + \dfrac{3}{x}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

c) Si pour tout $x > 0$, on a $1 + \dfrac{3}{x} \leqslant f(x) \leqslant 2 + \dfrac{3}{x}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ avec $\ell \in [1; 2]$.

d) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$, $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas la droite d'équation $y = a$.

Exercice 4.2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A$(2; -1; -2)$, B$(0; 4; 5)$ et C$(-1; 0; 3)$.

a) Montrer que les points A, B, et C ne sont pas alignés.

b) Montrer que le vecteur $\vec{n}(18; -11; 13)$ est un vecteur normal du plan (ABC).

c) Calculer une équation cartésienne du plan (ABC).

Sujet n°5

Exercice 5.1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 2^n - 1$

Exercice 5.2

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
Déterminer et représenter les ensembles de points suivants :

a) E_1, ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z-2| = |z|$

b) E_2, ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z-1+i| = 3$

c) E_3, ensemble des points M d'affixe z tels que : $\dfrac{z-2}{z+i}$ est un nombre réel.

Sujet n°6

Exercice 6.1

Soit F la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(2+t)dt$.
Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

a) $F(0) = \ln 2$?

b) $F'(x) = \dfrac{1}{2+x}$?

c) F est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$?

Exercice 6.2

Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par $\mathrm{A}(2;-3;5)$ et perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ d'équation $x-3y+z-5=0$.

Sujet n°7

Exercice 7.1

a) Résoudre l'inéquation : $(2x-7)\ln(x+1) \geqslant 0$

b) Soit f la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$.
Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[1\,;\,+\infty[$.

Exercice 7.2

On dispose d'un dé tétraédrique régulier, dont une seule face est rouge. On le lance 300 fois, et on note X la variable aléatoire qui indique le nombre de chutes sur la face rouge.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ? Préciser ses paramètres.

b) Justifier que la loi de probabilité de X peut être approchéd par une loi normale. Préciser les paramètre de cette loi normale.

c) En utilisant l'approximation normale, calculer avec votre calculette $P(60 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 90)$. On donnera le résultat avec deux décimales.

Sujet n°8

Exercice 8.1

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1 + 2\ln x}{x^2}$.

1) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de f.
2) Étudier les variations de f et construire son tableau de variation. On pourra utiliser la forme : $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$.
3) Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$, et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

Exercice 8.2

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c telles que $\dfrac{b-c}{a-c} = i$.
Déterminer la nature du triangle ABC.

Sujet n°9

Exercice 9.1

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_n = n + 1 - \cos(n)$

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $n \leqslant u_n \leqslant n + 2$

b) Quelest le comportement de la suite en $+\infty$

Exercice 9.2

Dans chacun des cas suivants déterminer l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite d.

a) $\mathscr{P} : x - 2y + 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad d : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

b) $\mathscr{P} : 2x + 3y - z = 0 \quad \text{et} \quad d : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 + 2s \\ z = -3 + 8s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$

Sujet n°10

Exercice 10.1

On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel n par : $u_n = \displaystyle\int_0^n x^2 e^{-x} dx$.

Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 10.2

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $4z^2 + 8z + 5 = 0$. On note z_1 et z_2 les affixes obtenues, z_1 étant le nombre complexe dont la partie imaginaire est positive.

b) On notera A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2, et C le point d'affixe $-2 + \dfrac{i}{2}$.
Donner l'écriture complexe de la médiatrice Δ du segment [BC].
Le point A appartient-il à la médiatrice du segment [BC] ?
Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

Sujet n°11

EXERCICE 11.1

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln x - x - 1$

a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$

b) Déterminer la dérivée de la fonction f et en déduite les variation de la fonction f sur $]0;+\infty[$

c) Combien l'équation $x\ln x - x - 1 = 0$ a t-elle de solution ?

EXERCICE 11.2

Une machine produit des clou dont la longueur moyenne est de 12 mm, avec un écart-type de 0,2 mm.
La longueur L d'un clou pris au hasard est une variable aléatoire qui suit une loi normale.
Un clou est jugé défectueux si sa longueur est supérieur à 12,5 mm ou inférieur à 11,5 mm.

1) Quelle est la proportion de clous défectueux ?

2) Pour un clou défectueux pris au hasard, quelle est la probabilité que sa longueur soit inférieur à 11,5 mm ?

Sujet n°12

EXERCICE 12.1

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} + 4 \end{cases}$

1) Démontrer par récurrence que :
   a) Pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant 16$.
   b) Pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant u_{n+1}$.

2) Démontrer que la suite (u_n) converge et que sa limite est 16.

EXERCICE 12.2

Le temps, en heure, nécessaire pour réparer une console de jeux suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

a) Quelle est la probabilité que le temps de réparation dépasse deux heures ?

b) Quelle est la probabilité qu'une réparation prenne au moins quatre heures, étant donné que sa durée a déjà dépassé trois heures ?

Sujet n°13

EXERCICE 13.1

On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel n par : $u_n = \displaystyle\int_0^n x^2 e^{-x} dx$.

Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

EXERCICE 13.2

A est le point de coordonnées $(1; 2; -3)$ et $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x - y + z + 1 = 0$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{P}$.

Sujet n°14 Spécialité

EXERCICE 14.1

Déterminer les entiers naturel x et y $(x < y)$ tels que :

$$\begin{cases} xy = 1\,734 \\ \text{pgcd}(x; y) = 17 \end{cases}$$

EXERCICE 14.2

Une urne contient trois boules bleues et deux boules rouges.
On réalise l'expérience suivante : On tire au hasard une boule de l'urne. Si elle est rouge on la garde, si elle est bleue on la remet dans l'urne. On tire alors une deuxième boule de l'urne. Si elle est rouge on la garde, si elle est bleue on la remet dans l'urne.
On note B_1 l'événement « la première boule tirée est bleue », R_1 l'événement « la première boule tirée est rouge », B_2 l'événement « la deuxième boule tirée est bleue » et R_2 l'événement « la deuxième boule tirée est rouge ».

1) Représenter l'arbre lié à cette expérience.

2) À chacune des questions une seule réponse proposée est exacte.
Une explication du choix sera demandée lors de l'interrogation orale.

a) $P(B_1 \cap B_2) = \dfrac{3}{5}$ $\qquad P(R_1 \cap B_2) = \dfrac{3}{5}$ $\qquad P_{B_1}(B_2) = \dfrac{3}{5}$ $\qquad P(B_2) = \dfrac{3}{5}$

b) La probabilité de $P(R_1 \cap B_2)$ est égale à :
$\dfrac{6}{5}$ $\qquad \dfrac{6}{25}$ $\qquad \dfrac{3}{10}$ $\qquad \dfrac{3}{4}$

c) La probabilité d'avoir tiré au moins une boule bleue est égale à :
$\dfrac{3}{5}$ $\qquad \dfrac{9}{10}$ $\qquad \dfrac{27}{50}$ $\qquad \dfrac{16}{25}$

Sujet n°15 Spécialité

EXERCICE 15.1

1) a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2013^4 par 16

   b) En déduire que : $2013^{8001} \equiv 2013 \pmod{16}$

2) On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2013^2 - 1$ et $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 4.

EXERCICE 15.2

La durée de vie T, en heure, d'un transistor suit une loi exponentielle telle que : $P(\mathrm{T} \leqslant 1000) = 0,095$

1) Calculer la probabilité conditionnelle : $P_{\mathrm{T}\geqslant 1000}(\mathrm{T} \geqslant 2000)$

2) Déterminer, à 1 h près, la durée $t_{1/2}$ telle que : : $P(\mathrm{T} \leqslant t_{1/2}) = 0,5$

Sujet n°16 Spécialité

EXERCICE 16.1

Soit n un entier relatif supérieur ou égal à 2.
On pose $a = n + 3$ et $b = 2n + 1$

a) Calculer $(2a - b)$, en déduire les valeurs possibles de $d = PGCD(a; b)$

b) Montrer que $PGCD(a; b) = PGCD(n - 2; 5)$.

c) Démontrer que a et b sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5.

EXERCICE 16.2

La durée de vie d'une ampoule électrique d'un type donné suit une loi normale de moyenne 2 200 et d'écart-type 200.
Quelle est la probabilité qu'une telle ampoule dure :

a) moins de 2 000 heures ?

b) plus de 2 400 heures ?

c) entre 2 000 heures et 2 400 heures ?

Sujet n°17 Spécialité

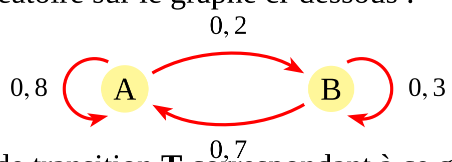
Exercice 17.1

Δ est l'ensemble des point du plan complexe d'affixe z telle que : $|z-1-2i| = |z+2-i|$

1) On note A et B les points d'affixes respectives $1+2i$ et $-2+i$
   a) Démontrer que : $M \in \Delta$ si, et seulement si, $MA = MB$
   b) En déduire l'ensemble Δ
2) Déterminer d'une autre façon l'ensemble Δ en utilisant la forma algébrique de $z = x + iy$, où x et y sont réels.

Exercice 17.2

On considère la marche aléatoire sur le graphe ci-dessous :



a) Déterminer la matrice de transition **T** correspondant à ce graphe.
b) On pose $\mathbf{P}_n$ la matrice colonne correspondant au $n$ième état de cette marche aléatoire. Déterminer l'expression de $\mathbf{P}_{n+1}$ en fonction de **T** et $\mathbf{P}_n$.
c) Déterminer l'état stable **P** de cette marche aléatoire
d) Étudier la convergence de la suite de matrices $(\mathbf{P}_n)$

Sujet n°18 Spécialité

Exercice 18.1

Soit Γ l'ensemble des point M du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $|z-(2-i)| = \sqrt{2}$.

1) On note A le point d'affixe $2-i$.
   a) Démontrer que $M \in \Gamma$ si, et seulement si, $AM = \sqrt{2}$.
   b) En déduire l'ensemble Γ. Représenter Γ
2) Déterminer d'une autre façon l'ensemble Δ en utilisant la forma algébrique de $z = x + iy$, où x et y sont réels.

Exercice 18.2

On donne le système suivant : $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ -2x + 9y = 8 \end{cases}$

a) Traduire à l'aide de matrices le système ci-dessus.
b) Résoudre alors ce système à l'aide de matrices