Devoir à rendre pour le 12 novembre 2012

Exercice I

Asymptote oblique **7 points**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 7}{x + 3}$

1) Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$, en $-\infty$ et en -3.
2) Déterminer la dérivée de la fonction f en vous aidant du rappel sur les dérivées en page 3.
3) Etudier le signe de la dérivée suivant les valeur de x puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
4) Soit la droite (Δ) d'équation $y = x + 2$
   a) Tracer, dans une même fenêtre de votre calculatrice, la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite (Δ). On tracera sur la copie l'allure de la fonction f et la droite (Δ). Qu'observe t-on pour les grandes valeurs de x en valeur absolue ?
   b) On pose $g(x) = f(x) - (x + 2)$. Montrer que : $g(x) = \dfrac{1}{x + 3}$. En déduire les limites de $g(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$.
   c) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et (Δ).
   d) Ecrire un algoritme, en pseudo-code, permettant de calculer l'entier $x > 0$ pour lequel la distance entre $\mathscr{C}_f$ et (Δ) est inférieur ou égal à un nombre a proche de zéro. Coder cet algoritme sur votre calculatrice et tester-le pour $a = 10^{-3}$

Exercice II

Vrai-Faux **4 points**

Pour chacune des affirmation ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

1) Si pour tout $x > 0$, on a $f(x) \leqslant \dfrac{2}{x}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
2) Si pour tout $x > 0$, on a $2 + \dfrac{2}{x} \leqslant f(x) \leqslant 2 + \dfrac{3}{x}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.
3) Si pour tout $x > 0$, on a $1+\dfrac{3}{x} \leqslant f(x) \leqslant 2+\dfrac{3}{x}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ avec $\ell \in [1;2]$.
4) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$, $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas la droite d'équation $y = a$.

Exercice III

Dérivée **5 points**

En vous aidant du rappel sur les dérivées, calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivation (non demandé) :

1) $f_1(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$

2) $f_2(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x(x-3)}$. ⚠ Donner la dérivée sous une forme factorisée.

3) $f_3(x) = (3x-1)^2(1-2x)^3$. ⚠ Ne pas développer $f_3(x)$ et factoriser $f_3\,'(x)$.

4) $f_4(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$. ⚠ On mettra la dérivée au même dénominateur.

5) $f_5(x) = \sin x \cos x$. ⚠ On donnera la dérivée sous la forme d'un cosinus.

Exercice IV

Fonction catastrophe **4 points**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{(x^{20}+100)^2 - 10\,000}{x^{20}}$

1) A l'aide de votre calculette, déterminer les valeurs approchées de $f(x)$ pour des valeurs proches de 0. Recopier et remplir le tableau suivant :

x	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,01
$f(x)$							

Quelle conjecture peut-on faire pour la limite de la fonction f en 0 ?

2) En développant $(x^{20}+100)^2$, trouver une expression simplifiée de $f(x)$.

3) Déterminer alors la limite de la fonction f en 0.

4) La conjecture est-elle vérifiée ? Si non, comment peut-on l'expliquer.

Rappel sur les dérivées

Dérivée des fonctions élémentaires

Voici le tableau des dérivées usuelles ainsi que leurs ensembles de validité.

Fonction	$\mathscr{D}_f$	Dérivée	$\mathscr{D}'_f$
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

Règles de dérivation

Dérivée de la somme	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(ku)' = ku'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$