Contrôle de mathématiques

Lundi 10 décembre 2012

Exercice 1

ROC **(4 points)**

On suppose connu le résultat suivant : pour tout réel x, on a $e^x > x$

1) Soit φ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $\varphi(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.
   Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $\varphi(x) \geqslant 1$.
2) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
3) Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}$.
   a) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b) Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations sur $[0\,;\,+\infty[$.

Exercice 2

Tangente passant par l'origine **(6 points)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x-1} + 1$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude de la fonction

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x : $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$.
4) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1) On appelle T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2) Démontrer qu'une tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité
   $$1 - a^2e^{a-1} = 0.$$
3) *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation
   $$1 - x^2e^{x-1} = 0.$$

4) Donner alors une équation de la tangente recherchée.

EXERCICE 3

Suite **(7,5 points)**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = e^x - x - 1$

1) Étudier les variations de la fonction g.
2) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3) En déduire que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe. Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

1) Montrer que pour tout x de $[0\,;1]$, $f(x) \in [0\,;\,1]$.
2) Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
   a) Montrer que pour tout x de $[0\,;1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.
   b) Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathcal{C})$ sur $[0\,;1]$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
2) Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 4

Fonction logistique **(2,5 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$

1) Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2\,e^{-\frac{x}{4}}}$
2) Étudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
3) Étudier les variations de f.

Ces fonctions ont été mises en évidence par Pierre François Verhulst (vers 1840) qui cherchait un modèle d'évolution de population non exponentielle. Le nom de courbe logistique leur a été donné par Verhulst sans que l'on sache exactement pourquoi. Il écrit en 1845 dans son ouvrage consacré à ce phénomène : "Nous donnerons le terme de logistique à cette courbe". L'auteur n'explique pas son choix mais "logistique" a même racine que logarithme et "logistikos" signifie "calcul" en grec !

ANNEXE
Á rendre avec la copie

Prénom :

Nom :