BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 9

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

EXERCICE 1 (5 points)

1) **Proposition 1 : vraie**

Si OAB est isocèle rectangle en A alors on doit avoir :

$$\frac{\text{AB}}{\text{AO}} = 1 \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AO}}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \qquad \text{donc} \qquad \frac{z_{\text{O}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}} = \pm i$$

Calculons :

$$\frac{z_{\text{O}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}} = \frac{-(2-5i)}{(7-3i)-(2-5i)} = \frac{-2+5i}{5+2i} = \frac{2i^2+5i}{5+2i} = \frac{i\,(5+2i)}{5+2i} = i$$

2) **Proposition 2 : vrai**

Soit les points A(i) et B($-2i$). Les point A et B sont sur l'axe des imaginaires purs.

$$|z-i| = |z+2i| \quad \Leftrightarrow \quad \text{AM} = \text{BM}$$

L'ensemble (Δ) des points M est alors la médiatrice du segment [AB]. (Δ) est donc perpendiculaire à (AB) donc à l'axe des imaginaires purs et donc parallèle à l'axe des réels.

3) **Proposition 3 : fausse**

On a : $z = 3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $z^{3n} = \left(2\sqrt{3}\right)^{3n} e^{i\frac{n\pi}{2}}$

Contre exemple avec $n = 2$: $z^6 = \left(2\sqrt{3}\right)^6 e^{i\pi} = -\left(2\sqrt{3}\right)^6$

z^6 est alors un réel.

4) **Proposition 4 : vraie**

Si $\arg z = \frac{\pi}{2}$ alors $z = k\,i$ avec $k \in]0;+\infty[$

On a alors : $|i+z| = |i+k\,i| = |(1+k)\,i| = 1+k$ et $1+|z| = 1+|k\,i| = 1+k$

On a donc bien : $|i+z| = 1+|z|$

5) **Proposition 5 : vraie**

Si $|z| = 1$ alors $z = e^{i\theta}$ donc $z^2 + \frac{1}{z^2} = e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = 2\cos 2\theta$

Donc $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un réel.

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A : étude d'une fonction

1) Limites

- En $+\infty$: on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$
- En 1 : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \ln x = 0^+ \end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

2) $f'(x) = \dfrac{\ln x - x \times \dfrac{1}{x}}{\ln^2 x} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

- $f'(x) = 0 = \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e$
- Signe($f'(x)$)=signe($\ln x - 1$)

Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]1;+\infty[$, on a :

- si $x \in]1;e[$, $\quad f'(x) < 0$, f est strictement décroissante
- si $x \in]e;+\infty[$, $\quad f'(x) > 0$, f est strictement croissante.

3) Comme la fonction f est strictement croissante sur $]e;+\infty[$:

$$x \geqslant e \quad \Rightarrow \quad f(x) \geqslant f(e) \text{ or } f(e) = e \quad \Rightarrow \quad f(x) \geqslant e$$

Partie B : étude d'une suite récurrente

1) Cf annexe

Au vu du graphique, on peut conjecturer que la suite (u_n) est strictement décroissante et qu'elle tend vers l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$

2) a) Soit la proposition : P_n : $\forall x \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant e$.
Par récurrence :

- **Initialisation** : on a : $u_0 = 5$ donc $u_0 \geqslant e$. P_0 est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que $u_n \geqslant e$, montrons que $u_{n+1} \geqslant e$

  On a $u_n \geqslant e$ donc d'après la question A3), on a : $f(u_n) \geqslant e$, donc $u_{n+1} \geqslant e$
  P_n est héréditaire
- Par initialisation et hérédité, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant e$

b) On pourrait refaire une récurrence pour montrer que (u_n) est décroissante, mais il y a mieux :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\ln u_n} - u_n = u_n\left(\frac{1}{\ln u_n} - 1\right) = u_n\left(\frac{1 - \ln u_n}{\ln u_n}\right)$$

D'après la question précédente, on sait que $u_n \geqslant e$, donc, comme la fonction ln est strictement croissante, $\ln u_n \geqslant 1$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}$$

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par e, elle est donc convergente vers $\ell \geqslant e$

d) La fonction f est continue (car dérivable) sur $]e;+\infty[$, la suite u_n est convergente vers ℓ, donc, d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$

$$\ell = f(\ell) \quad \Leftrightarrow \quad \ell = \frac{\ell}{\ln \ell} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{1}{\ln \ell} \quad \Leftrightarrow \quad \ln \ell = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ell = e$$

La suite (u_n) converge vers e.

3) L'algorithme affichera la valeur 3 : la croissance de la suite est très rapide : les trois premières décimales de e sont déjà trouvées.

EXERCICE 3 (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1) On appelle X, la variable aléatoire associée au mobre de moteur que tombe en panne la première année. Comme les 20 moteurs sont tirés de façon indépendante et que la probabilité qu"'un moteur tombe en panne la première année est $p = 0,12$, X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(20; 0,12)$

$$P(\mathrm{X} = 2) = \binom{20}{2} \times 0,12^2 \times 0,88^{18} \simeq 0,274$$

2) $P(\mathrm{X} \geqslant 1) = 1 - P(\mathrm{X} = 0) = 1 - 0,88^{20} \simeq 0,922$

Partie B

1) On doit avoir :

$$P(\mathrm{Y} < 1) = 0,12 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-\lambda} = 0,12 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda} = 0,88 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\ln 0,88 \simeq 0,128$$

2) $P(\mathrm{Y} > 3) = e^{-3\times 0,128} \simeq 0,681$

3) Comme la loi exponentielle est une loi sans mémoire, on a

$$P_{\mathrm{Y}>1}(\mathrm{Y}>4) = P_{\mathrm{Y}>1}(\mathrm{Y} > 1 + 3) = P(\mathrm{Y} > 3) \simeq 0,681$$

4) On a : $d_m = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,128} \simeq 7,8$ ans

Partie C

1) On peut faire l'approximation normale de la loi binomiale pour F, car :

$$n = 500 \geqslant 30, \quad np = 60 \geqslant 5, \quad n(1-p) = 440 \geqslant 5$$

L'intervalle I_{500} fluctuation asymptotique à 95 % est donc :

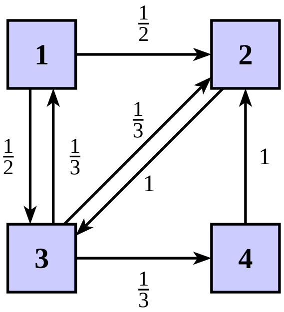
$$\mathrm{I}_{500} = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = [0,091; 0,149]$$

2) On a $f_{\text{obs}} = \dfrac{50}{500} = 0,1 \in \mathrm{I}_{500}$.

La valeur $p = 0,12$ est vraisemblable et il n'y a pas de raison à la remettre en cause.

EXERCICE 3 (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



1) L'employé peut se rendre
   - en un clic uniquement sur la page 2
   - en deux clics uniquement sur la page 3

2) D'après le graphe, on trouve la matrice de transition **T** suivante :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le coefficient t_{32} correspond à la probabilité que l'employé étant sur la page 3, il se rende sur la page 2

3) a) On obtient les matrice suivante, avec la précision de 10^{-2}

$$\mathbf{T}^3 \simeq \begin{pmatrix} 0,17 & 0,42 & 0,25 & 0,17 \\ 0,00 & 0,50 & 0,50 & 0,00 \\ 0,17 & 0,17 & 0,50 & 0,17 \\ 0,33 & 0,33 & 0,00 & 0,33 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}^4 \simeq \begin{pmatrix} 0,08 & 0,33 & 0,50 & 0,08 \\ 0,17 & 0,17 & 0,50 & 0,17 \\ 0,17 & 0,42 & 0,25 & 0,17 \\ 0,00 & 0,50 & 0,50 & 0,00 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}^8 \simeq \begin{pmatrix} 0,15 & 0,33 & 0,38 & 0,15 \\ 0,13 & 0,38 & 0,38 & 0,13 \\ 0,13 & 0,31 & 0,44 & 0,13 \\ 0,17 & 0,29 & 0,38 & 0,17 \end{pmatrix}$$

b) Les probabilités qu'un employé se rende en cliquant au hasard :
   - de la page 2 à la page 3 en trois clics : 0,50 ;
   - de la page 3 à la page 4 en quatre clics : 0,17 ;
   - de la page 4 à la page 3 en huit clics : 0,38

4) a) Si $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n \times \mathbf{T}$, on obtient de proche en proche : $\mathbf{X}_n = \mathbf{X}_0 \times \mathbf{T}^n$.

b) On a :

$$\mathbf{X}_4 = \mathbf{X}_0 \times \mathbf{T}^4 \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,08 & 0,33 & 0,50 & 0,08 \\ 0,17 & 0,17 & 0,50 & 0,17 \\ 0,17 & 0,42 & 0,25 & 0,17 \\ 0,00 & 0,50 & 0,50 & 0,00 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0,17 & 0,17 & 0,50 & 0,17 \end{pmatrix}$$

c) on a : $\mathbf{T}^{20} \simeq \begin{pmatrix} 0,13 & 0,33 & 0,40 & 0,13 \\ 0,13 & 0,33 & 0,40 & 0,13 \\ 0,13 & 0,33 & 0,40 & 0,13 \\ 0,13 & 0,33 & 0,40 & 0,13 \end{pmatrix}$

On observe que les coefficients de chaque colonne sont sensiblement égaux. Cela veut dire que quelque soit l'état initial la matrice **X** semble se stabiliser.

d) Si la matrice ligne $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{X}_n$ se stabilise vers **X** alors $\mathbf{X} = \mathbf{X} \times \mathbf{T}$. Vérifions le :

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}\times\mathbf{T} &= \begin{pmatrix}\dfrac{2}{15} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{15}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{15}+\dfrac{2}{15}+\dfrac{1}{15} & \dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\dfrac{2}{15} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{15}\end{pmatrix}\\
&= \mathbf{X}
\end{aligned}$$

On peut alors déduire le classement des indices de pertinence des pages : $\mu_3 > \mu_2 > \mu_1 = \mu_4$

Exercice 4 **(4 points)**

Partie A

On doit avoir : $h(0) = 0,1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 2$

On sait que : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to+\infty} -0,04t = -\infty\\ \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0\end{array}\right\}$ Par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,04t} = 0$

Par somme et quotient, on en déduit : $\lim\limits_{t\to+\infty} = a$

On a alors le système suivant :

$$\begin{cases}\dfrac{a}{1+b} = 0,1\\ a = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 2\\ 1+b = \dfrac{a}{0,1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 2\\ b = 10a - 1 = 19\end{cases}$$

On a : $h(t) = \dfrac{2}{1+19e^{-0,04\,t}}$

Partie B

1) $f'(t) = -\dfrac{2(-19\times 0,04\,e^{-0,04\,t})}{(1+19\,e^{-0,04\,t})^2} = \dfrac{1,52\,e^{-0,04\,t}}{(1+19\,e^{-0,04\,t})^2}$

or on sait que, $\forall t\in\mathbb{R}$, $e^t > 0$ donc $\forall t \in [0;250]$, $f'(t) > 0$. La fonction f est strictement croissante sur [0 ;250].

2) On doit résoudre : $f(t) > 1,5 \Leftrightarrow \dfrac{2}{1+19\,e^{-0,04\,t}} > 1,5$

Comme $1 + 19e^{-0,04t} > 0$, on a alors :

$$1,5 + 28,5\,e^{-0,04\,t} < 2 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-0,04\,t} < \frac{0,5}{28,5} = \frac{1}{57}$$

Comme la fonction ln est monotone sur $\mathbb{R}$, on a :

$$-0,04\,t < \ln\frac{1}{57} \quad\Leftrightarrow\quad 0,04\,t > \ln 57 \quad\Leftrightarrow\quad t > \frac{\ln 57}{0,04} \simeq 101,08$$

Il faut donc 102 jours pour que le plant de maïs atteigne une hauteur de 1,5 m

3) a) $f(t) = \dfrac{2}{1+19\,e^{-0,04\,t}}\times\dfrac{e^{0,04\,t}}{e^{0,04\,t}} = \dfrac{2\,e^{0,04\,t}}{e^{0,04t}+19}$

On pourrait dériver la fonction F pour trouver la fonction f, mais pour les puristes, on peut chercher la primitive de f en remarquant que si on pose :

$$u(t) = e^{0,04\,t} + 19 \quad\text{donc}\quad u'(t) = 0,04\,e^{0,04\,t}$$

on a alors : $f(t) = \dfrac{2}{0,04}\dfrac{u'(t)}{u(t)}$ soit la primitive : $F(t) = 50\ln|u(t)| = 50\ln(e^{0,04\,t} + 19)$

b) La valeur moyenne μ de la fonction f sur [50 ;100] est définie par :

$$\mu = \frac{1}{100-50}\int_{50}^{100} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{50}\Big[F(t)\Big]_{50}^{100} = \frac{50}{50}\left[\ln(e^4+19) - \ln(e^2+19)\right] = \ln\left(\frac{e^4+19}{e^2+19}\right) \simeq 1,0256$$

En moyenne, entre le 50e et le 100e jours, la hauteur du plan est de 1,03 m

Annexe de l'exercice 2

(À rendre avec la copie)