BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7

OBLIGATOIRE

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

EXERCICE 1 (3 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissance

On rappelle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$.

Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1) Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.
Montrer que la fonction g est positive sur $[1\,;\,+\infty[$.

2) a) Montrer que, pour tout x de $[1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b) En déduire le sens de variation de f sur $[1\,;\,+\infty[$.
   c) On appelle (D) la droite d'équation $y = x$. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x$. Que peut-on déduire des représentations $\mathscr{C}$ et (D) ?

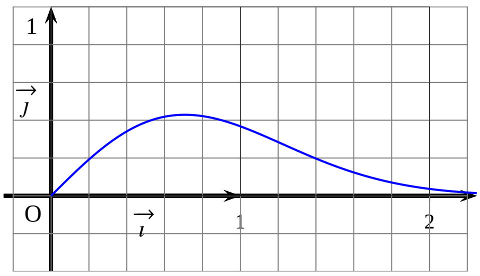
EXERCICE 2 (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1) a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$).
   b) Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur I

2) a) Déterminer une primitive F de f sur I. (on expliquera clairement la forme utilisée)
   b) Soit a un élément de I, montrer que l'aire $\mathscr{A}(a)$ de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = a$:

$$\mathscr{A}(a) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-a^2}\right)$$

   c) Que vaut $\mathscr{A}(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$

On ne cherchera pas à expliciter u_n.

1) a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$
   b) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
   c) Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

EXERCICE 3 (7 points)

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation (E) : $e^x = \dfrac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

Partie A : Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1) Démonter que x est solution de l'équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.
2) Étude du signe de la fonction f
   a) Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.
   c) Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.
   d) Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$.

Partie B : Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : $g(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x}$.

1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
2) En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.
3) Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$.

Partie C : Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

On considére la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
2) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3) Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.
4) On donne l'algorithme suivant :

```
Variables
N, U, I, g (fonction)
Initialisation
Lire N
0 → U
Traitement
Pour I de 1 à N faire
   g(U) → U
FinPour
Afficher U
```

Après avoir rentrer la fonction g dans votre calculatrice ainsi que le programme ci-contre, recopier puis compléter le tableau suivant avec de valeurs arrondies à la **6e décimale** :

N	2	3	4	5
U				

Que peut-on dire de l'efficité de ce programme ?

EXERCICE 4 (5 points)

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm. On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On appelle f l'application du plan $\mathcal{P}$ privé du point O dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M différent de O, d'affixe z, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = z + i - \frac{1}{z}$$

1) On considère les points A et B d'affixes respectives $a = i$ et $b = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A′ et B′ par f d'affixes respectives a' et b'.
   a) Calculer a' et b'.
   b) Placer les points A, A′ B et B′.
   c) Démontrer que $\dfrac{-b}{b'-b} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$.
   d) En déduire la nature du triangle OBB′.
2) On recherche l'ensemble (E) des points du plan $\mathcal{P}$ privé du point O qui ont pour image par f, le point O.
   a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^2 + iz - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

   b) En déduire les affixes des points de l'ensemble (E). On donnera leurs écriture exponentielles.
   c) Démontrer que les points de (E) appartiennent à (Γ).
3) Soit θ un réel.
   a) Démontrer que si $z = e^{i\theta}$ alors $z' = (2\sin\theta + 1)i$.
   b) En déduire que si M appartient au cercle (Γ) alors M' appartient au segment [A′C] où C a pour affixe $-i$.