Devoir à rendre pour le 04 novembre 2013

Exercice I

Étude d'une fonction **6 points**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1}$

1) Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$, en $-\infty$. En déduire d'éventuelle(s) asymptote(s) à la courbe répresentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.
2) Déterminer la dérivée de la fonction f.
3) Étudier le signe de la dérivée suivant les valeur de x puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
4) Déterminer l'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
5) Déterminer l'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ en $x = 1$.
6) Représenter la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente (T) ainsi que le(s) éventuelle(s) asymptote(s) et tangente(s) horizontale(s).

Exercice II

Vrai-Faux **4 points**

Pour chacune des affirmation ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

a) La limite en $+\infty$ de la fonction $\dfrac{\cos x}{x^2 + 1}$ n'existe pas.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - |x - 1| = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2 - x}}{x} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6} = \dfrac{4}{5}$

Exercice III

Dérivée **4 points**

En vous aidant du rappel du tableau sur les dérivées des fonctions élémentaires et des règles de dérivation, déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

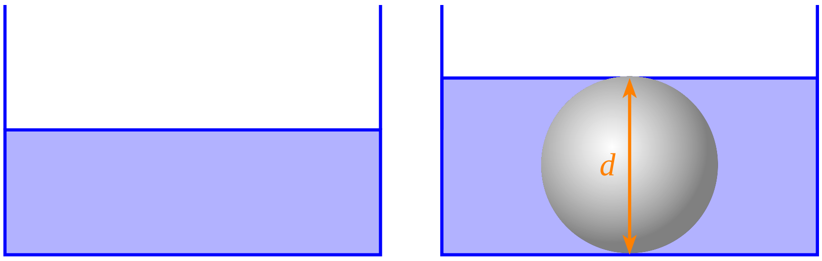
1) $f_1(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 9}$
2) $f_2(x) = x\sqrt{x + 3}$. ⚠ Donner la dérivée sous la forme d'une fraction.
3) $f_3(x) = 2x + 1 + \dfrac{2}{x - 3}$. ⚠ Donner la dérivée sous une forme factorisée.

4) $f_4(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{x+3}$. ⚠ Donner la dérivée sous une forme factorisée.

Exercice IV

Problème d'immersion **6 points**

On dispose d'un récipient cylindrique de rayon 40 cm contenant de l'eau dont la hauteur est 20 cm. On y plonge une bille sphérique de diamètre d (en cm) et on constate que le niveau de l'eau est tangent à la bille. Le but de cet exercice est de calculer le diamètre d de la bille.



1) Vérifier que d est solution du système

$$\begin{cases} 0 \leqslant d \leqslant 80 \\ d^3 - 9\,600d + 192\,000 = 0 \end{cases}$$

2) f est la fonction sur $[0; 80]$ par :

$$f(x) = x^3 - 9\,600x + 192\,000$$

a) Déterminer la dérivée de la fonction f. En déduire le signe de la dérivée puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;80]$.

b) D'après le tableau de variation, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[0\,;80]$.

c) Déterminer un algorithme permettant de calculer cette solution à 10^{-2} près.

On rappelle que :

- le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est égal à $\pi r^2 h$
- le volume d'une sphère de rayon r est égal à : $\dfrac{4}{3}\pi r^3$