Contrôle de mathématiques

Lundi 09 décembre 2013

Exercice 1

ROC **(3 points)**

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.
   Montrer que pour tout réel x : $f(x) \geqslant 1$.
2) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
3) En faisant un changement de variable astucieux démontrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Exercice 2

Propriétés, équation et inéquation **(2 points)**

1) Simplifier l'expression suivante : $\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes :
   a) $e^{2x+1} - 1 = 0$
   b) $\dfrac{e^x + 3}{e^x + 1} > 2$

Exercice 3

Exercice bac **(7,5 points)**

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**
   a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.
      Étudier le sens de variation de la fonction g et déterminer la limite de g en $+\infty$. On dressera le tableau de variation.
   b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
   c) Déterminer un encadrement de a à 10^{-3}
   d) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2) **Étude de la fonction f**
   a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
      Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel : $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.
   e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

EXERCICE 4

Fonctions logistiques **(7,5 points)**

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-kx}}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$.

La représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est donnée en **annexe**, à rendre avec la copie.

1) Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2) Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$.
3) On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathscr{C}_{-1}$ d'abscisse x. On note K le milieu du segment [MP].

1) Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
2) En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_1$?
3) Tracer soigneusement la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ sur l'**annexe**, à rendre avec la copie.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1) Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
2) Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.
3) Pour tout réel $k \geqslant 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqslant 0,99$.

Annexe de l'exercice 4
À rendre avec la copie

Prénom :

Nom :