Contrôle de mathématiques

Jeudi 30 janvier 2014

Exercice 1

ROC **1 point**

Pré-requis : Pour tous complexes z et z', on a : $z\bar{z} = |z|^2$ et $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$

Montrer que pour tous complexe z et z', on a : $|zz'| = |z|\,|z'|$

Exercice 2

Equation du troisième degré **4 points**

Soit l'équation (E) : $x^3 - 18x + 35 = 0$

1) a) Démontrer, sans la calculer, que l'équation (E) possède au moins une solution réel α. On pourra éventuellement définir la fonction f telle que : $f(x) = x^3 - 18x + 35$.

   b) Pour l'équation $x^3 + px + q = 0$, on donne la formule de Cardan ci-dessous. Déterminer alors α

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

2) a) Montrer que l'on peut écrire : $x^3 - 18x + 35 = (x + 5)(x^2 - 5x + 7)$

   b) En déduire alors toutes les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$

Exercice 3

QCM **4 points**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre ou trois propositions est exacte. Une réponse **exacte** rapporte 1 point ; une réponse **inexacte** enlève 0,5 point ; l'**absence** de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

1) Soit $z_1 = \sqrt{6}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $i\,\dfrac{z_1}{z_2}$ est :

   a) $\sqrt{3}\,e^{i\frac{19\pi}{12}}$ b) $\sqrt{12}\,e^{-i\frac{\pi}{12}}$ c) $\sqrt{3}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$ d) $\sqrt{3}\,e^{i\frac{13\pi}{12}}$

2) L'équation $-z = \bar{z}$, d'inconnue complexe z, admet :

   a) une solution

   b) deux solutions

   c) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.

   d) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

3) Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z + i| = |z - i|$.

   a) Γ est l'axe des abscisses.

   b) Γ est l'axe des ordonnées.
   c) Γ est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.

4) On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.
   a) Le triangle OBC est isocèle en O.
   b) Les points O, B, C sont alignés.
   c) Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.

EXERCICE 4

Vrai-Faux **4 points**

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2 + \frac{1}{2}i, \quad b = -1 - i, \quad c = 3 + i, \quad d = 5 + \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad e = 3 - 4i$$

1) **Affirmation 1** : les points A, B et C sont alignés.
2) **Affirmation 2** : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.
3) **Affirmation 3 :** L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - i| = |z + 1|$ est une droite.
4) **Affirmation 4 :** Le nombre complexe $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^4$ est un nombre réel.

EXERCICE 5

Problème **7 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1$ et le point B d'affixe $z_{\mathrm{B}} = i$.
À tout point M d'affixe $z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -i\, z_M$.
On désigne par I le milieu du segment [AM].
Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que BM' = 2OI (propriété 2).

1) Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$.
   a) Déterminer la forme algébrique de z_M.
   b) Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - i$.
      Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.
   c) Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ en prenant 2 cm pour unité graphique.
      Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriété 1 et 2 à l'aide du graphique.
2) On revient au cas général en prenant $z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.
   a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.

b) Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.

c) Écrire les coordonnées des points I, B et M'.

d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.

e) Montrer que BM' = 2OI.