Contrôle de mathématiques

Du lundi 26 mai 2014

Exercice 1

Fabrication de billes **(8 points)**

Tous les résultats numériques devront être donnés sous forme décimale et arrondis au ***dix-millième***

Une usine fabrique des billes sphériques dont le diamètre est exprimé en millimètres.
Une bille est dite hors norme lorsque son diamètre est inférieur à 9 mm ou supérieur à 11 mm.

Partie A

1) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque bille choisie au hasard dans la production associe son diamètre exprimé en mm.

   On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type $0,4$.

   Montrer qu'une valeur approchée à 0,000 1 près de la probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,012 4. On pourra utiliser la table de valeurs donnée en annexe.

2) On met en place un contrôle de production tel que 98 % des billes hors norme sont écartés et 99 % des billes correctes sont conservées.

   On choisit une bille au hasard dans la production. On note N l'événement : « la bille choisie est aux normes », A l'événement : « la bille choisie est acceptée à l'issue du contrôle ».

   a) Construire un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé.

   b) Calculer la probabilité de l'événement A.

   c) Quelle est la probabilité pour qu'une bille acceptée soit hors norme ?

Partie B

Ce contrôle de production se révélant trop coûteux pour l'entreprise, il est abandonné : dorénavant, toutes les billes produites sont donc conservées, et elles sont conditionnées par sacs de 100 billes.
On considère que la probabilité qu'une bille soit hors norme est de 0,012 4.
On admettra que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.
On appelle Y la variable aléatoire qui à tout sac de 100 billes associe le nombre de billes hors norme de ce sac.

1) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?

2) Quels sont l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y ?

3) Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme ?

4) Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au plus une bille hors norme ?

EXERCICE 2

Droites et plans dans l'espace **(8 points)**

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2) Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$.
   a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3) Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.
   a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
   b) Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4t-2 \\ y = t \\ z = 3t+2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
   c) La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

EXERCICE 3

Malformation cardiaque **(2 points)**

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %.
On considère un échantillon de 400 personnes.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % .
2) Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme. Qu'en pensez-vous ?

EXERCICE 4

Vrai-Faux **(2 points)**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points

$$A(0\,;\,-1\,;\,1),\quad B(4\,;\,-3\,;\,0)\ \text{ et }\ C(-1\,;\,-2\,;\,-1).$$

On appelle $\mathcal{P}$ le plan passant par A, B et C.

On appelle Δ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 3t-1 \\ z = -2t+8 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et **justifier la réponse**.

1) **Affirmation 1** : Δ est orthogonale à toute droite du plan $\mathcal{P}$.
2) **Affirmation 2** : les droites Δ et (AB) sont coplanaires.

Annexe de l'exercice 1

A	B
d	$P(X < d)$
0	3,06E-138
1	2,08E-112
2	2,75E-89
3	7,16E-69
4	3,67E-51
5	3,73E-36
6	7,62E-24
7	3,19E-14
8	2,87E-07
9	0,00620967
10	0,5
11	0,99379034
12	0,99999971
13	1
14	1
15	1
16	1
17	1
18	1
19	1
20	1
21	1
22	1