BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

EXERCICE 1 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$

1) On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : n entier, u réel
Entrées et initialisation
    Lire n
    1 → u
Traitement
    pour i variant de 1 à n
    faire
        √(2u) → u
    fin
Sorties : Afficher u
```

a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b) Que permet de calculer cet algorithme ?

c) Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). On pourra comparer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

d) Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

```
Variables : n entier, u réel
Entrées et initialisation
    0 → n
    1 → u
Traitement
    ...
    ...
    ...
    ...
Sorties : ...
```

EXERCICE 2 (3 points)

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{2}x}$

1) Démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$

2) a) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f

b) Montrer que la fonction f peut se mettre sous la forme : $2\left(\frac{1}{2}x\,e^{\frac{1}{2}x}\right) + 2e^{\frac{1}{2}x}$

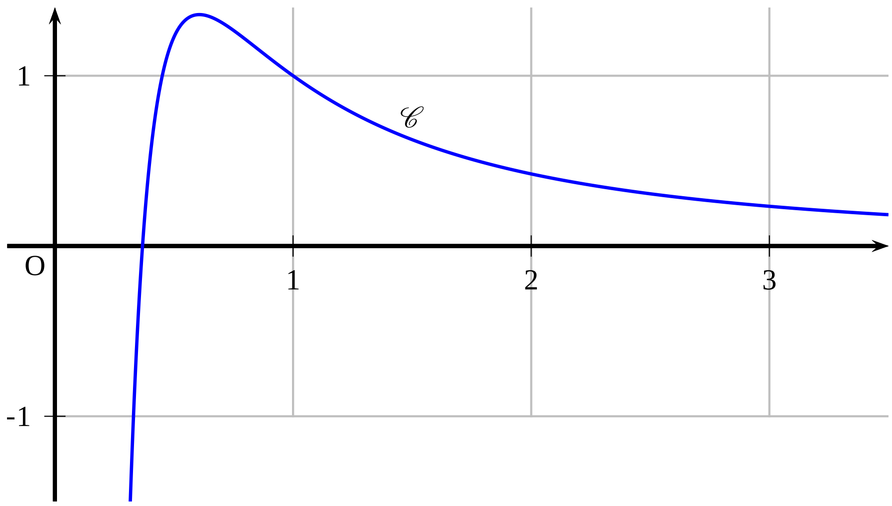
En déduire la limite de la fonction f en $-\infty$. On rédigera soigneusement cette limite.

3) Déterminer les variations de la fonction f puis dresser le tableau de variation

EXERCICE 3 (7 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1 + \ln(x)}{x^2}$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1) a) Étudier la limite de f en 0.

b) Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2) a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}$

b) Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1 - 2\ln(x) > 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3) a) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = n$.

a) Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant e - \dfrac{1}{2}$.

On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{-2 - \ln(x)}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b) Calculer I_n en fonction de n.

c) Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

EXERCICE 4 (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; unité graphique 2 cm. On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$. On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z-1}{z+1}$$

On fera la figure sur l'annexe (à rendre avec la copie) qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1) Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.
2) a) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1,
   $(z'-1)(z+1) = -2$.

   b) En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1.
   Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
3) Montrer que si M appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle $(\mathscr{C}')$ de centre A et de rayon 1.
4) Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.

   a) Déterminer la forme exponentielle de $(p+1)$.

   b) Montrer que le point P appartient au cercle $(\mathscr{C})$.

   c) Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.
   Montrer que les points A, P′ et Q sont alignés dans cet ordre.

   d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P′ du point P par l'application f.

Nom :

Prénom :

Annexe de l'exercice 4

(À rendre avec la copie)